

# **ITR sem mentiras: um comentário sobre a taxaço de terras com informaço assimétrica**

Juliano Junqueira Assunção<sup>\*</sup>

Humberto Moreira<sup>\*\*</sup>

## **Resumo**

O objetivo do artigo é mostrar que a assimetria de informaço presente na relaço entre governo e produtores agropecuários pode constituir a origem dos problemas que ainda persistem na aplicaço do Imposto Territorial no Brasil. Através da construçáo de um modelo teórico simples, que se baseia no problema de taxaço ótima sob informaço assimétrica, é possível analisar limitaçoes inerentes à aplicaço do Imposto Territorial Rural que ainda não se incorporaram à análise da taxaço de terras.

Diante de uma situaço onde há terra ociosa, como ocorre no Brasil, o modelo teórico desenvolvido mostra que o uso do ITR como único instrumento tributário não é capaz de implementar o esquema ótimo. E a soluço apontada pelo modelo envolve a utilizaço de um esquema misto que considera o Imposto sobre a Circulaço de Mercadorias e Serviços (ICMS) e o ITR.

Dessa forma, o modelo apresentado tenta preencher uma lacuna existente entre os modelos de taxaço sob informaço assimétrica e os modelos mais específicos de taxaço de terra. E, como implicaçoes de política, os resultados sugerem um redirecionamento do estudo do ITR, atualmente centrado em questões de ordem operacional, como determinaço de alíquotas e outras regras.

## **I. Introduço**

O Imposto Territorial Rural (ITR), desde sua criaço através do Estatuto da Terra, em 1964, tem por objetivo auxiliar as políticas públicas de desconcentraço da terra. Entretanto, observou-se um grau elevado de evasão e inadimplência que abalou sua eficácia como instrumento de política fundiária. E, tentando mitigar

---

<sup>\*</sup> Doutorando em Economia pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio e Pesquisador Associado do Centro de Desenvolvimento de Planejamento Regional – CEDEPLAR/UFMG.

<sup>\*\*</sup> Doutor em Economia Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA e Professor de Economia da PUC-Rio.

os problemas detectados, foram feitas duas grandes reformulações em 1979 e 1996, que ainda não se revelaram suficientes.

O objetivo do artigo é mostrar que a assimetria de informação presente na relação entre governo e produtores agropecuários pode constituir a origem dos problemas que ainda persistem na aplicação do imposto. Diante de uma situação onde há terra ociosa, como ocorre no Brasil, o modelo teórico desenvolvido mostra que o uso do ITR como único instrumento tributário não é capaz de implementar o esquema ótimo. E a solução apontada pelo modelo envolve a utilização de um esquema misto que considera o Imposto sobre a Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS) e o ITR.

A principal contribuição deste trabalho é a construção de um modelo teórico que se concentra na análise do problema de taxaçaõ ótima sob informaçaõ assimétrica, considerando aspectos específicos à agricultura e, em especial, motivado pela realidade brasileira.

O modelo apresentado tenta preencher uma lacuna existente entre os modelos de taxaçaõ sob informaçaõ assimétrica e os modelos de taxaçaõ de terra. De um lado, os modelos de taxaçaõ ótima abordam fundamentalmente impostos sobre o consumo e renda, não considerando tópicos relevantes e específicos da atividade agrícola [Mirrlees (1971, 1986)]. Por outro lado, os artigos que tratam da taxaçaõ de terras se concentram em outras questões, descritas brevemente a seguir.

Henry George (1839-1897) foi o primeiro a estabelecer uma racionalidade econômica para a taxaçaõ de terras, em *Progress and Poverty*, publicado em 1879. O autor atribuiu o desemprego e os baixos salários a uma escassez artificial de terras e ao mau funcionamento do mercado. Essa escassez artificial seria o re-

sultado de uma distribuição desigual das terras públicas e de atividades especulativas. Nesse contexto, George propõe a utilização do imposto sobre a propriedade da terra para dinamizar o mercado de terras, sendo capaz de induzir ao pleno uso do solo, sem distorcer os incentivos marginais. Arnott e Stiglitz (1979) analisam a generalidade da proposição que ficou conhecida como teorema de Henry George, tornando-se uma referência clássica nessa direção.

Outros autores também salientam as vantagens inerentes ao uso do imposto sobre a terra como fonte de arrecadação [Deininger (1998) e Skinner (1991b)]. O imposto sobre terra não distorce a alocação de recursos e constitui um dos poucos exemplos de imposto *lump-sum* em termos agregados, o qual poderia garantir um nível mínimo de arrecadação, pois a oferta de terra é inelástica. Além disso, o tamanho dos estabelecimentos é observado: principalmente em regiões onde a propriedade da terra é individualizada, existem informações acessíveis e confiáveis sobre o tamanho das propriedades.

O artigo de Hoff (1991), de outro modo, qualifica a utilização do imposto sobre terra. A autora argumenta que em um ambiente de incerteza como a agricultura, em que os produtores são avessos ao risco, o uso exclusivo do imposto sobre a terra promove uma alocação ineficiente do risco. No modelo de Hoff (1991), a utilização paralela do imposto sobre o produto revela-se Pareto-superior. A composição ótima de imposto sobre o produto e imposto sobre a terra é determinada pelo dilema entre distorção (introduzida pelo imposto sobre o produto) e compartilhamento de risco.

Carter e Mesbah (1993), utilizando um modelo de equilíbrios múltiplos, mostram que a utilização de um imposto sobre a terra é ineficaz para o deslocamento da “barreira de acumulação”. Essa barreira é estabelecida pelo tamanho crí-

tico do estabelecimento que determina se o produtor será um pequeno ou um grande proprietário. Entretanto, este resultado é decorrente do esquema linear de imposto sobre a terra utilizado pelos autores. Regras com alíquotas progressivas, como no caso do ITR, poderiam afetar significativamente, nesse modelo, a barreira de acumulação.

Skinner (1991a) enfatiza os altos custos informacionais requeridos para a administração desse tipo de imposto. Entretanto, apesar de considerar a possibilidade de tipos de produtores diferentes, não trata do problema de desenho de mecanismos com o qual o governo se depara. Na relação entre governo e produtores, apenas o comportamento dos últimos é estratégico. O governo tem apenas uma probabilidade positiva de avaliar incorretamente o valor das terras.

Outra questão avaliada por Skinner (1991a) estabelece que a perda de capital resultante da aplicação do imposto é transitória, afetando apenas os atuais proprietários de terra. Entretanto, quando os agentes têm acesso a outros ativos, uma condição de não-arbitragem garante que o imposto seja completamente absorvido por uma redução no preço da terra.

O modelo apresentado no artigo tem uma relação estreita com a realidade brasileira e os artigos já mencionados. O problema de custos informacionais levantado por Skinner (1991a), presente na realidade brasileira, pode ser ao menos parcialmente resolvido pela utilização do imposto sobre o produto. A utilização desse imposto, além de transferir menos risco aos produtores (como no modelo de Hoff (1991)), constitui um instrumento essencial para a obtenção de declarações corretas dos parâmetros de produtividade e quantidade de terra cultivada.

A propriedade da terra, no modelo, tem duas finalidades básicas. De um lado pode ser utilizada para a produção agrícola mas, por outro, é usada para fins

especulativos, considerando seu valor como colateral, em uma economia com mercado de crédito imperfeito, ou como ativo financeiro, que se valoriza principalmente em momentos de inflação alta.

O modelo considera ainda um contínuo de tipos de produtores que se diferenciam pelo acesso à atividade especulativa e pela produtividade agrícola. Estes produtores determinam a extensão de sua propriedade e a área de cultivo. O tipo de cada produtor constitui uma informação privada e não há mercado de arrendamento, isto é, a extensão cultivada não pode ultrapassar o tamanho do estabelecimento.

O governo maximiza sua função de utilidade que considera a receita tributária e os benefícios especulativos da terra, observando o tamanho dos estabelecimentos e a quantidade total produzida. A suposição que a quantidade produzida é observada pelo governo tenta incorporar no modelo o fato de que a arrecadação do ICMS é muito mais eficaz do que a arrecadação do ITR. E então, por simplicidade, foi suposto que a observação da quantidade produzida é equivalente à da arrecadação do ICMS.

Os resultados básicos são os seguintes: usar apenas o ITR é ótimo quando a informação do governo é completa ou quando não há, em equilíbrio, terra ociosa; caso contrário, pode-se implementar o esquema ótimo de tributação como uma combinação linear entre o ICMS e o ITR.

Ou seja, caso haja terra ociosa em equilíbrio, não existem alíquotas capazes de implementar o esquema de tributação ótimo apenas com o ITR. E, para os pequenos produtores que operam em equilíbrio sem terra ociosa, o ITR pode ser implementado, o que é compatível com algumas evidências empíricas, indicadas na seção II.

O artigo está organizado em seis seções. A seção II apresenta sucintamente um retrospecto da aplicação do ITR no Brasil. O modelo teórico é descrito na seção III, que estabelece a notação básica para as seções IV e V e que analisam os casos de informação completa e assimétrica, respectivamente. As seções IV e V apresentam os resultados básicos do modelo de forma heurística. A versão formalizada dos argumentos encontra-se no apêndice. Por fim, as principais implicações e contribuições do trabalho são resumidas na conclusão.

## **II. A Experiência Brasileira com o ITR**

O imposto sobre a propriedade da terra foi instituído no Brasil pela Constituição Republicana de 1891, vigorando em âmbito estadual. A responsabilidade dos estados pela cobrança e administração do imposto foram mantidas nas Constituições de 1934, 1937 e 1946. Em 1961, com a promulgação da Emenda Constitucional no. 5, o ITR foi transferido aos municípios e, em 1964, com a Emenda Constitucional no. 10, ocorreu a transferência para a competência da União. A promulgação do Estatuto da Terra em 1964 impôs funções extra-fiscais ao imposto que passa, em princípio, a auxiliar as políticas públicas de desconcentração da terra (Oliveira (1993) e Reydon *et al.* (2000)).

A seguir, serão descritas brevemente as mudanças ocorridas nas três fases que sucederam à implantação do Estatuto da Terra. Esta retrospectiva histórica permite que sejam analisadas as razões que levaram às principais modificações e, na medida do possível, a abrangência das soluções adotadas. Ao final desta seção, espera-se que o leitor se convença que, mesmo após uma série de mudanças, ainda persiste um problema crônico com a implementação do imposto que impede a

obtenção do nível de arrecadação desejado. E é esse o objeto central do modelo teórico da seção III.

### **Primeira Fase: 1964-1979**

Após a promulgação do Estatuto da Terra (Lei no. 4504, 30 de novembro de 1964), a cobrança do ITR tornou-se responsabilidade do INCRA. Utilizando a descrição de Oliveira (1993), a alíquota básica era de 0,2%, corrigida por coeficientes relacionados à dimensão (A), localização (B), condições sociais (C) e produtividade (D), o que determinava uma carga tributária dada por:

$$ITR = (0,002 \times A.B.C.D)VTN ,$$

onde *VTN* representa o valor da terra nua. Dadas as faixas de variação de cada coeficiente, a alíquota variava de 0,24% a 3,456%.

Entretanto, verificou-se que os objetivos que pautaram o desenho do imposto estavam longe de ser alcançados. Oliveira e Costa (1979), citados por Oliveira (1993), concluíram que o ITR nunca chegou a constituir uma boa fonte de receita e tampouco conseguiu promover as mudanças desejadas no meio rural. As principais conclusões apresentadas pelos autores são:

1. “Dado o pequeno impacto do ITR (e tributos paralelos) sobre o lucro e taxa de retorno dos imóveis rurais e, dado o não cumprimento das obrigações fiscais por grande parte dos contribuintes, pode-se inferir que o referido imposto não contribui e dificilmente contribuirá para alterar as relações econômico-sociais na agricultura brasileira.
2. Do ponto de vista de categorias de imóveis, o ITR apresenta incoerências, ao tributar mais pesadamente o minifúndio do que o latifúndio e, em inúmeros casos, trata-se a empresa rural com mais rigor do que os latifúndios. A razão de

tais inversões decorre da sistemática de cálculo do imposto que não discrimina o contribuinte segundo categoria de imóveis (minifúndio, empresa rural e latifúndio).

3. A categorização de imóveis rurais adotada pelo INCRA para definir minifúndios, empresa rural e latifúndios não tem contrapartida na realidade.
4. A pretendida variação de alíquotas legais não é observada. Isto se deve ao fato de os coeficientes de dimensão, localização, condições sociais e produtividade não se adequarem à realidade da estrutura rural brasileira.
5. O problema de evasão é grave.
6. O sistema de atualização do valor da terra nua, nos anos entre-recadastramento, segundo índice de correção monetária, não reflete o comportamento da base tributária no tempo”.

Enfim, o quadro que se estabelecia nos anos 70, resumidamente apresentado acima, evidencia uma série de problemas com a implementação do ITR. Nessa época, em virtude da importância dos problemas operacionais, responsáveis por grandes distorções, questões de natureza mais estrutural não ocupavam o espaço devido nas discussões. Acreditava-se, e estas crenças ainda persistem, que os problemas envolvidos com o ITR são apenas de ordem operacional.

### **Segunda Fase: 1979-1996**

As complicações enfatizadas acima motivaram à primeira reformulação importante na legislação do ITR. As modificações mais significativas para as questões relacionadas com este trabalho recaíram sobre o artigo 49 do Estatuto da Terra, segundo o qual, “as normas gerais para a fixação do Imposto sobre a Propriedade Territorial Rural passam a obedecer a critérios de progressividade e regressi-

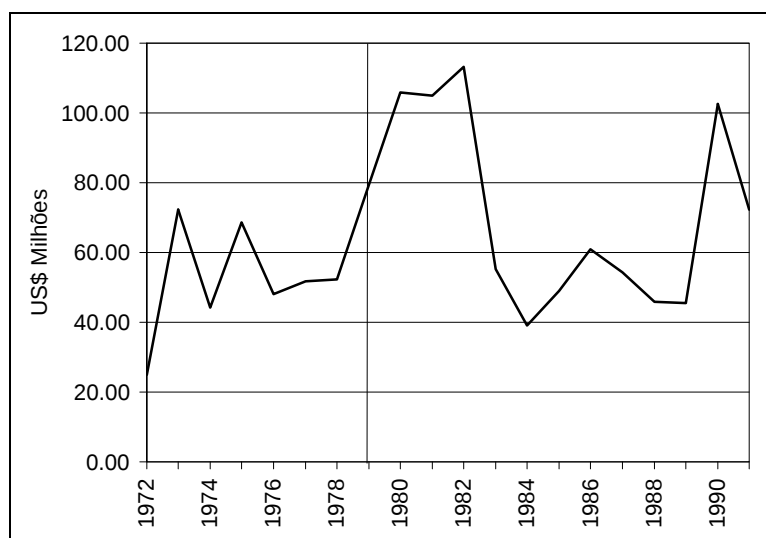
vidade, levando-se em conta os seguintes fatores: o valor da terra nua; a área do imóvel rural; o grau de utilização da terra na exploração agrícola, pecuária e florestal; o grau de eficiência obtido nas diferentes explorações; a área total, no País, do conjunto de imóveis rurais de um mesmo proprietário; a classificação das terras e suas firmas de uso e rentabilidade”.

Utilizando novamente a descrição de Oliveira (1993), a reformulação ainda manteve o VTN como base do tributo. A alíquota tornou-se uma função do grau de utilização da terra (GUT) e do grau de eficiência da exploração (GEE), de modo que

$$ITR = [t(GUT, GEE)]VTN .$$

E de acordo com este esquema a alíquota teria uma variação entre 0,2% e 3,5% (para propriedade acima de 100 módulos fiscais<sup>1</sup>).

Figura 1.1 – Arrecadação do ITR (1972-1991)



Fonte: Oliveira (1993)

Os dados apresentados por Oliveira (1993) apontam uma frustração com a arrecadação. Os níveis da arrecadação se elevaram nos anos subsequentes à

<sup>1</sup> A definição de módulo fiscal do município considera os seguintes fatores: tipo de exploração predominante (hortifrutigranjeira, cultura permanente, cultura temporária, pecuária e florestal); produtividade por cultura e de um conceito de agricultura familiar.

mudança mas retornaram, em 1983, aos níveis anteriores, como mostra a figura 1.1. E, mesmo em 1990, o nível arrecadado corresponde à insignificante quantia de US\$ 20,30 por imóvel rural. A carga tributária correspondeu a 25% de um salário mínimo/ano em janeiro de 1992.

Segundo a Secretaria de Comunicação de Governo da Presidência da República, o percentual do VTN declarado em relação ao preço real da terra na década de 80 variava de 20% para as propriedades com menos de 10 ha a 1,2% para as grandes propriedades com mais de 10 mil ha. A área declarada aproveitável era muito menor que a real, com os maiores proprietários declarando algo em torno de 50% e os menores 94%. E a declaração da produtividade era ainda mais irreal, com casos, aceitos pelo INCRA, em que a produtividade era mais de dez vezes superior ao valor esperado calculado pelo IBGE.

O impacto diferenciado do esquema de cobrança do ITR sobre pequenos e grandes proprietários pode ser entendido no contexto do modelo do capítulo III. Neste modelo, esquemas que usam apenas o ITR têm o efeito desejado em pequenos produtores. Para os grandes proprietários que operam com terra ociosa, torna-se necessária a utilização de um outro instrumento, o ICMS.

Apesar dos problemas de sub-tributação e evasão encontrados, a questão da assimetria de informação na relação entre governo e proprietários de terra ainda não era incorporada na análise. Ao contrário, análises como a de Sayad (1982) consideravam hipóteses que já eliminavam esta característica fundamental do problema de taxação no mercado de terras. Dentre as hipóteses enunciadas pelo autor, destacam-se: “agricultores e não agricultores têm a mesma expectativa de valorização, ou seja, ambos são igualmente otimistas ou pessimistas com relação à evolução futura dos preços dos imóveis rurais; e não existe *cultura de vitrine*, ou se-

ja, a possibilidade de burlar o imposto através da manutenção de cultivo agrícola apenas suficiente para evitar a taxaçaõ”.

Novamente o debate concentrava-se em questões operacionais, principalmente na complexidade do cálculo do imposto e no descontrolo administrativo. Os altos níveis de evasão eram atribuídos à ineficiência do órgão arrecadador. E, como consequência destas constatações, a administração do ITR passa para a Secretaria da Receita Federal em 1990.

### Terceira Fase: Pós 1996

Em resposta aos problemas detectados, foi feita uma reformulação em dezembro de 1996 que, dentre outras modificações, determinou:

- aumento da alíquota dos imóveis grandes e improdutivos - o limite máximo de 4,5% para a propriedade acima de 15 mil hectares passou para 20% sobre propriedades acima de 5 mil hectares;
- simplificação das faixas de cobrança de 12 para 6;
- fim da diferenciação regional das alíquotas;
- valor declarado pelo proprietário, para efeito do pagamento do ITR, será considerado em caso de desapropriação.

Tabela 1.1 – Tabela de alíquotas para Cálculo do ITR

| Área total do imóvel<br>(em hectares) | Grau de Utilização |         |         |         |       |
|---------------------------------------|--------------------|---------|---------|---------|-------|
|                                       | >80                | 65 a 80 | 50 a 65 | 30 a 50 | <30   |
| até 50                                | 0.03               | 0.20    | 0.40    | 0.70    | 1.00  |
| 50 a 200                              | 0.07               | 0.40    | 0.80    | 1.40    | 2.00  |
| 200 a 500                             | 0.10               | 0.60    | 1.30    | 2.30    | 3.30  |
| 500 a 1000                            | 0.15               | 0.85    | 1.90    | 3.30    | 4.70  |
| 1000 a 5000                           | 0.30               | 1.60    | 3.40    | 6.00    | 8.60  |
| acima de 5000                         | 0.45               | 3.00    | 6.40    | 12.00   | 20.00 |

Fonte: Lei 9.393, de 19 de dezembro de 1996.

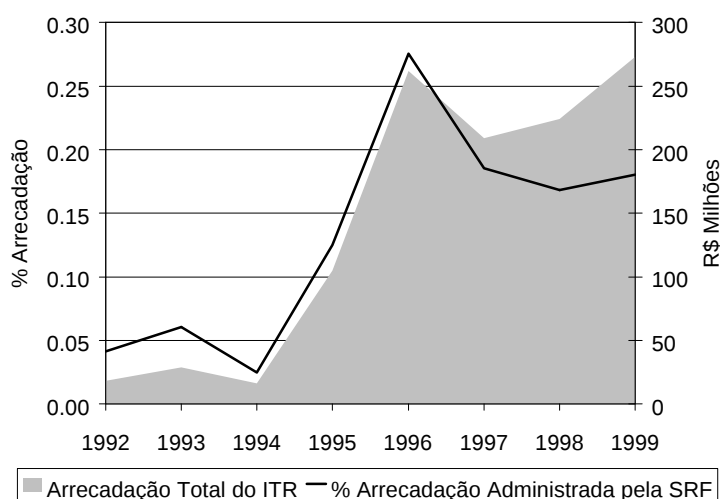
As alíquotas diferenciam-se apenas pelo grau de utilização e pela área total do imóvel, de acordo com a tabela 1.1. Pode-se verificar que há uma acentua-

da progressividade no tamanho da propriedade e regressividade no grau de utilização, modificada de forma que os imóveis produtivos foram privilegiados.

Reydon *et al.* (2000) salienta a descontinuidade presente nas alíquotas adotadas, observando que um imóvel com 50,1 ha e um grau de utilização de 80,0% pode pagar um montante de imposto 13 vezes maior que um imóvel de 50,0 ha com grau de utilização igual a 80,1%. E a solução apontada por alguns autores é o uso de redutores, como ocorre no Imposto de Renda.

Além disto, Reydon *et al.* (2000) mostram que, apesar dos aperfeiçoamentos administrativos e legais, as expectativas geradas em torno da reformulação não se confirmaram. E as principais razões se associam à dificuldade de avaliação do valor da terra nua e da imprecisão do conceito de área utilizada. A tabela 1.2 mostra, de um lado, a melhoria obtida com a reformulação de 1996 e, por outro, o baixo grau de arrecadação.

Figura 1.2 – Arrecadação do ITR (1992-1999)



Fonte: Secretaria da Receita Federal

Segundo cálculos de Oliveira (1993), a receita potencial do ITR iria variar entre 1,4 e 2,8 bilhões de dólares por ano, caso fossem utilizadas alíquotas entre 0,5% e 1,0%. Apesar dos cálculos não considerarem o efeito da aplicação efetiva

destas alíquotas sobre as decisões dos proprietários de terra, a magnitude das estimativas deixam claro o espaço existente para o aumento da arrecadação.

Enfim, mesmo após a melhoria de uma série de problemas operacionais, o ITR ainda continua pouco efetivo. A situação descrita nessa seção caracteriza a incapacidade do governo em aplicar corretamente um esquema de taxaço e com isso mitigar os altos graus de evasão e sub-tributaço. Os dados fornecidos apontam ainda para o fato de que esta incapacidade ainda é mais crônica as para grandes propriedades.

### III. Estrutura Básica do Modelo

O modelo se concentra no problema de um governo que maximiza sua utilidade desenhando um mecanismo de taxaço baseado na quantidade produzida e no tamanho da propriedade. Esse mecanismo é capaz de implementar o sistema de transferências de equilíbrio para o governo. E a observação da quantidade produzida é considerada, por simplificação, a observação do próprio ICMS, uma vez que a evasão do ICMS é muito menor que a do ITR.

A atividade especulativa é considerada de forma *ad hoc*, como uma forma reduzida de outros modelos em que a terra é utilizada para fins não produtivos, seja como colateral [Hoff, Braverman e Stiglitz (1993)] ou como *hedge* contra a inflação [Brandão e Rezende (1992) , Feldstein (1980)].

O modelo considera, então, uma economia em que os tipos dos produtores rurais são indexados por  $(q, h) \in \Theta$ , onde  $\Theta = [\underline{q}, \bar{q}] \times [\underline{h}, \bar{h}]$ , distribuídos segundo a função distribuição  $F_{qh}$  com suporte em todo o retângulo. Os parâmetros  $q$  e  $h$

referem-se, respectivamente, à produtividade das atividades agrícola e especulativa.

O preço do produto agrícola é normalizado em 1, existe uma quantidade ilimitada de terras ao preço  $r$  e cada hectare cultivado custa<sup>2</sup>  $w$ . Tanto o produto quanto as terras são perfeitamente homogêneos.

O agricultor do tipo  $(q, h)$  que compra uma propriedade de tamanho  $T$ , cultiva  $A$  e paga uma transferência  $t$  para o governo, tem o lucro dado por:

$$\Pi = qQ(A) - wA + hf(T) - rT - t$$

onde  $Q$  e  $f$  são as funções de produção e de benefícios especulativos, respectivamente, com  $Q' > 0, Q'' < 0, Q'(0) = \infty, Q'(\infty) = 0, f' > 0, f'' < 0, f'(0) = \infty$  e  $f'(\infty) = 0$ . Essa transferência é determinada pelo governo, que pode condicioná-la à quantidade produzida e ao tamanho da propriedade, que são observáveis. Pode-se notar que quanto maior  $h$ , maior o benefício da especulação e, quanto maior  $q$ , maior é a produtividade da atividade agrícola.

Assume-se que não há mercado de arrendamento e que, portanto, a escolha de cada produtor deve respeitar a condição de escassez  $A \leq T$ . Desse modo, diante de um esquema de taxa $\tilde{c}$ o  $t$ , os agricultores se deparam com o programa

$$\max_{A, T} \Pi \text{ s.a. } A \leq T. \quad (P)$$

O governo tem sua utilidade dependente da receita tributária e do uso especulativo da terra. Sendo  $l \in [0, 1]$  o “preço sombra” atribuído à atividade especulativa, a função de utilidade do governo é definida por:

$$U = t - lh f(T).$$

---

<sup>2</sup> Implicitamente, para simplificar, a tecnologia de produção envolve proporções fixas, em que  $w$  representa o gasto com mão-de-obra e insumos intermediários por hectare.

Dessa forma, o governo passa a se opor à atividade especulativa, o que parece ser o caso do governo brasileiro. O combate ao uso especulativo da terra, incorporado de forma *ad hoc*, pode ser fundamentado pela existência de um outro setor que necessita dos produtos agrícolas mas não compartilha de nenhum benefício oriundo da atividade não produtiva, em um modelo de equilíbrio no mercado de terras, com oferta de terras inelástica.

Ao considerar a utilidade dos indivíduos desse setor, o governo pode se motivar a inibir a manutenção de terra ociosa. Em um ambiente com terra escassa, a existência de terra ociosa em equilíbrio resulta da atividade especulativa e gera um aumento artificial no preço da terra, o que acaba restringindo a produção agrícola. Então o governo, ao considerar a utilidade de todos os indivíduos tenta implementar um esquema de tributação para restabelecer o preço da terra no nível socialmente ótimo, além de tentar prover o maior volume de serviços públicos possível, que são revertidos aos indivíduos da economia de forma *lump-sum*.

A presença da receita tributária na função de utilidade pode ser justificada de diferentes formas. Uma razão suficiente seria que os indivíduos da economia demandariam bens públicos, que são providos em um nível sub-ótimo pela iniciativa privada. E o governo, motivado por sua manutenção no poder, teria um incentivo a maximizar sua arrecadação, caso a provisão dos recursos envolva um volume de recursos suficientemente grande.

Para simplificar a análise e tornar o problema o mais próximo da realidade brasileira, é considerado apenas o caso em que há uma relação determinista entre os tipos  $q$  e  $h$ , ou seja,  $q = q(h)$ , com  $q(\cdot)$  contínua e diferenciável. Dessa forma, os produtores podem ser especificados completamente pelo parâmetro  $h$  e  $\Theta = [\underline{h}, \bar{h}]$ . A distribuição de  $h$  em  $\Theta$  é dada pela função distribuição  $F$ . E mais, os

resultados derivados consideram apenas o caso em que  $\dot{q} < 0$ <sup>3</sup>. Ou seja, aqueles produtores com maior acesso à atividade especulativa não estão envolvidos inteiramente com a agricultura e, diante das imperfeições do mercado de trabalho, tornam-se menos produtivos, e vice-versa.

Os resultados apresentados nas próximas duas seções são enunciados e demonstrados rigorosamente no apêndice. E, para ilustrar graficamente os resultados enunciados, foi considerado um exemplo numérico que também é descrito no apêndice.

## IV. Resultados com Informação Completa

Inicialmente, a escolha do mecanismo de taxação é feita em um ambiente de informação completa. Ou seja, o governo observa com exatidão o tipo dos agentes, conseguindo fixar as regras de cobrança dos impostos que consideram a disposição de cada agricultor em utilizar a terra de forma produtiva e especulativa.

O governo, sob informação completa, pode determinar as alocações de cada produtor, via um esquema de punição via a taxação. As únicas condições que restringem a escolha do governo são a restrição de escassez (SC) e a restrição de participação (IR) para cada produtor. Os produtores aceitam qualquer esquema de taxação do governo que produza um nível de lucro não-negativo em equilíbrio. O mecanismo ótimo de taxação, nesse caso, é definido pelo programa (P.FB) para o produtor do tipo  $h$  :

$$\max_{\{t, A, T\}} U \quad (\text{P.FB})$$

---

<sup>3</sup> Os resultados qualitativos obtidos são mantidos para caso em que  $\dot{q} > 0$ . O uso do ICMS, nesse caso, também seria necessário para os produtores que operam com terra ociosa, em equilíbrio, quando o governo não observa o tipo dos produtores. Esse resultado não se verifica apenas para o caso em que  $\dot{q} = 0$ .

sujeito a

$$\Pi \geq 0, \quad (\text{IR})$$

$$A \leq T. \quad (\text{SC})$$

A solução deste programa é definida pelo resultado a seguir.

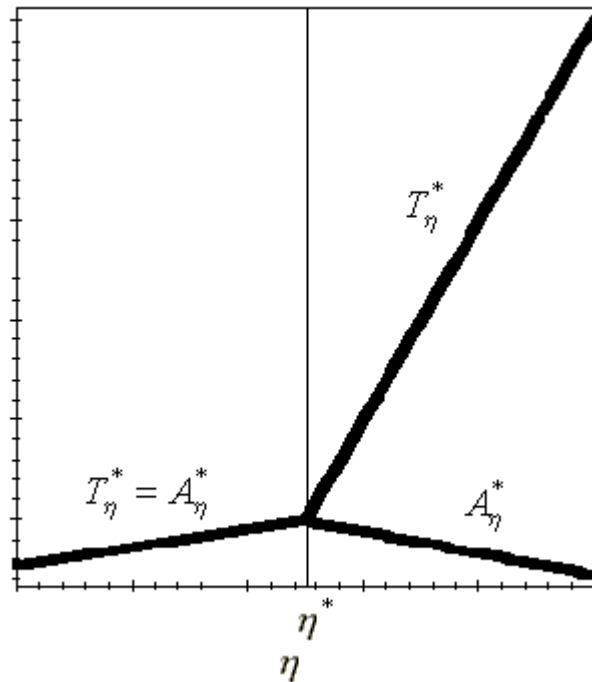
**Proposição 1:** *Sob informação completa, o mecanismo ótimo de taxaço pode envolver duas categorias de produtores: (i) aqueles que operam sem terra ociosa e são restritos por (SC):  $h \in \Theta_R$ ; (ii) aqueles para os quais a restrição (SC) não é ativa:  $h \in \Theta_I$ .*

- a) *Em  $\Theta_R$ , a alocação de equilíbrio é tal que a área cultivada é igual ao tamanho da propriedade. Ambas são determinadas pela igualdade entre o benefício marginal total  $[qQ'(A_h^*) + hf'(T_h^*)]$  e o custo social marginal de cada hectare cultivado  $[w + r + lhf'(T_h^*)]$ .*
- b) *Em  $\Theta_I$ , os produtores não encontram-se restritos por (SC). A área cultivada é determinada pela igualdade entre o benefício marginal  $[qQ'(A_h^*)]$  e o custo marginal de cada hectare cultivado  $[w]$ . O tamanho da propriedade é tal que iguala o benefício marginal da atividade especulativa  $[hf'(T_h^*)]$  ao seu custo marginal social  $[r + lhf'(T_h^*)]$ .*
- c) *O governo consegue apropriar todo o lucro dos produtores.*

Note que o custo marginal social difere do custo marginal individual em  $lhf'(T_h^*)$ , o que sugere uma interpretação natural para  $l$ . Quando  $l = 0$ , o governo não se importa com o benefício especulativo da propriedade da terra e os níveis de  $A$  e  $T$  determinados pelo programa de desenho do esquema ótimo de taxaço (P.FB) coincidem com aqueles determinados pelos agentes em autarquia (P). Nes-

se caso, o preço sombra da atividade especulativa é zero e o governo, ao maximizar a receita tributária, maximiza o lucro individual de cada produtor que é completamente apropriado. Por outro lado, caso  $l = 1$ , o governo inibe completamente a terra ociosa, uma vez que o preço sombra da restrição de escassez torna-se constante e igual a  $r$  para todo  $h \in \Theta$ .

**Figura 4.1** – Alocação Ótima com Informação Completa



As transferências exigidas pelo governo representam todo o lucro dos produtores. No modelo com informação completa, todas as restrições (IR) são ativas em equilíbrio.

A figura 4.1 ilustra qualitativamente o formato das alocações associadas ao esquema ótimo de taxa<sup>4</sup>.

O resultado a seguir mostra que este esquema pode ser implementado por um esquema análogo ao do ITR.

<sup>4</sup> As figuras das seções IV e V foram construídas a partir de um exemplo numérico que considerou:  $Q = \log(A)$ ,  $f = k \log(T)$ ,  $q = m - h$  e  $h \sim U[0,1]$ , onde  $k$  e  $m$  são constantes, assim como  $w$ ,  $r$  e  $l$ .

**Proposição 2:** *Sob informação completa, a solução do problema de taxação ótima pode ser descentralizada por um menu de impostos lineares da forma:*

$$t_h^* = b_h^* T + g_h^*,$$

onde  $b_h^*$  corresponde à diferença entre o custo marginal social e o custo marginal individual da propriedade da terra e  $g_h^*$  é uma parcela fixa que ajusta o nível da arrecadação.

Na implementação oferecida pelo resultado acima, o governo oferece um par  $(b_h^*, g_h^*)$  para o produtor do tipo  $h$ . E, ao resolver (P), cada agricultor escolhe as quantidades de  $A$  e  $T$  determinadas pela solução ótima. Note que há uma analogia direta entre o ITR, em cumprimento à sua função sobre a distribuição de terra, e o parâmetro  $b_h^*$ . A alíquota é mais alta quanto maior  $l$  e quanto maior a disposição do agricultor em utilizar terra de forma não produtiva, o que é medido por  $h$ . Caso  $l = 0$ , o governo não distorce a escolha dos produtores, não taxando a propriedade da terra.

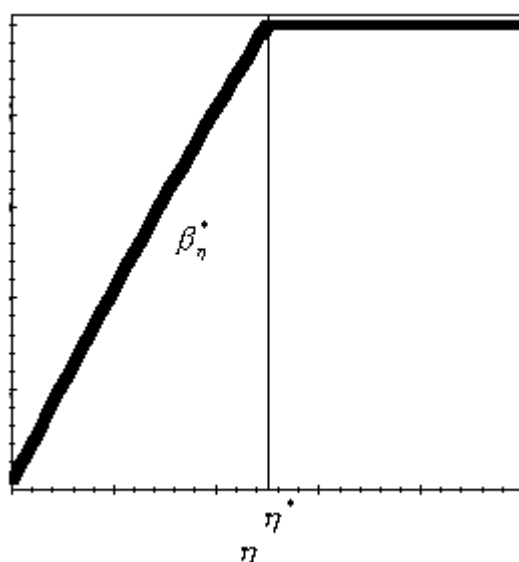
Em  $\Theta_l$ , tem-se que  $b_h^* = \frac{l}{1-l} r$  e, portanto, a alíquota de ITR não varia

segundo o tipo do produtor. Com isso o modelo mostra que, num contexto de informação completa, pode-se usar uma alíquota única para produtores que operam acima de determinado tamanho de propriedade. A figura 4.2 ilustra o formato que as alíquotas ótimas para o ITR devem obedecer no caso de informação completa.

O resultado mostra que, se o governo conseguisse observar com precisão os parâmetros de produtividade dos proprietários de terra, existiriam alíquotas capazes de implementar um esquema ótimo de taxação. Portanto, o ITR seria capaz de implementar a solução ótima. E nessa solução, se  $l > 0$ , o governo inibiria o

uso especulativo da terra, sendo que, com  $l = 1$ , não haveria terra ociosa em equilíbrio.

**Figura 4.2 – Alíquotas Ótimas do ITR com Informação Completa**



## V. Resultados com Informação Assimétrica

Considere o modelo mais realista em que há uma informação assimétrica sobre a produtividade e o benefício especulativo da terra. O problema de escolha ótima do esquema de taxa  o transforma-se então em um t  pico problema de desenho de mecanismos.

Pelo princípio da revelação, basta que o governo concentrar-se naqueles mecanismos diretos e reveladores da verdade [Mirrlees (1971)]. Dessa forma, além de considerar as restrições de escassez (SC) e de participação (IR) para cada tipo de produtor, o esquema de tributação é condicionado pela restrição de compatibilidade de incentivos (IC).

As restrições (IC) para cada tipo de produtor podem ser entendidas como  $h \in \arg \max \Pi(\hat{h} | h)$ , onde  $\Pi(\hat{h} | h)$  é o lucro do produtor do tipo  $h$  que declara ser do tipo  $\hat{h}$ . Ou seja, no mecanismo de tributação ótimo, o produtor do tipo  $h$  prefere a alocação  $(t_h, T_h, A_h)$  a qualquer outra.

A determinação do mecanismo de tributação ótimo sob informação assimétrica é feita pelo governo através da resolução do seguinte programa de maximização:

$$\max_{\{t_h, A_h, T_h\}_{h \in [\underline{h}, \bar{h}]}} \int_{\underline{h}}^{\bar{h}} t_h - l h f(T_h) dF(h) \quad (\text{P.SB})$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \Pi(h | h) &\geq 0, & (\text{IR}_h) \\ \Pi(h | h) &\geq \Pi(\hat{h} | h), & (\text{IC}_h) \\ A_h &\leq T_h, (h, \hat{h}) \in [\underline{h}, \bar{h}]^2. & (\text{SC}_h) \end{aligned}$$

Note que o programa de maximização do governo está escrito nas variáveis  $t$ ,  $A$  e  $T$ , apesar de que, no modelo, o governo observa apenas  $T$  e  $qQ$  ao determinar  $t$ . Entretanto, como fica provado na demonstração da Proposição 4, no apêndice, um mecanismo baseado em  $t$ ,  $A$  e  $T$  pode ser implementado por um mecanismo em  $t$ ,  $T$  e  $qQ$ , e vice-versa. Ao escolher o mecanismo ótimo, o governo incorpora as restrições  $(\text{SC}_h)$  em sua decisão, uma vez que a restrição de escassez e a racionalidade dos agentes são de conhecimento comum.

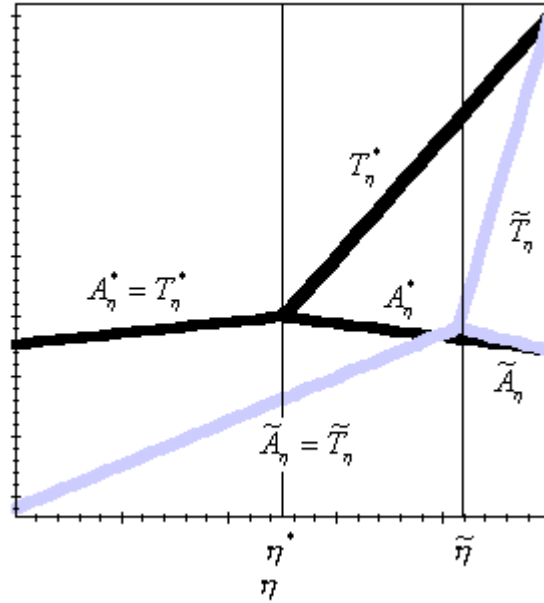
A solução do modelo com informação assimétrica pode ser dada então pela seguinte proposição.

**Proposição 3:** O esquema ótimo de tributação  $(\tilde{t}_h, \tilde{A}_h, \tilde{T}_h)$ , sob informação assimétrica, do programa (P.SB) tem as seguintes características:

- i) existem no máximo 2 categorias de produtores:  $\tilde{\Theta}_R = [\underline{h}, \tilde{h}]$  e  $\tilde{\Theta}_I = (\tilde{h}, \bar{h}]$  tais que  $\tilde{A}_h = \tilde{T}_h$  para todo  $h \in \tilde{\Theta}_R$  e há um aumento do número de produtores restritos por (SC), ou seja,  $\Theta_R \subset \tilde{\Theta}_R$ ;
- ii) em  $\tilde{\Theta}_R$ ,  $(\tilde{A}_h, \tilde{T}_h)$  são determinados pela igualdade entre o benefício marginal e o custo marginal “virtual” total do hectare cultivado que corresponde ao custo marginal social somado à renda informacional marginal:
- $$\left( \frac{1-F(h)}{f(h)} \dot{q} Q'(\tilde{A}_h) + f'(\tilde{T}_h) \right); \text{ mais ainda, } \dot{A}_h = \dot{T}_h > 0;$$
- iii) em  $\tilde{\Theta}_I$ ,  $(\tilde{A}_h, \tilde{T}_h)$  são determinados pela igualdade entre o benefício marginal e o custo marginal “virtual” de cada hectare cultivado e cada hectare de terra:
- $$\frac{1-F(h)}{f(h)} \dot{q} Q'(\tilde{A}_h) \text{ e } \frac{1-F(h)}{f(h)} f'(\tilde{T}_h), \text{ respectivamente; mais ainda, } \dot{T}_h > 0 \text{ e } \dot{A}_h < 0;$$
- iv) em decorrência da informação assimétrica, as transferências para o governo são descontadas da renda informacional obtida por cada agente;
- v) apenas o agente do tipo  $\underline{h}$  não recebe renda informacional – para os demais, as restrições (IR) não são ativas.

Esse resultado demonstra o efeito da assimetria de informação sobre a escolha da quantidade de terra utilizada de forma produtiva e a quantidade de terra ociosa. Caso exista um  $\tilde{h} \in (\underline{h}, \bar{h})$  o esquema de tributação ótimo do governo não consegue inibir totalmente a utilização de terra ociosa, mesmo se  $l = 1$ .

**Figura 5.1** – Alocação Ótima com Informação Completa



Mesmo para os produtores sem terra ociosa,  $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$ , há uma distorção na determinação do tamanho do estabelecimento em relação ao caso com informação completa. Para esses produtores, esta distorção significa o cultivo de menores lotes. A figura 5.1 apresenta uma comparação entre as alocações obtidas nos casos de informação completa e assimétrica. Note que, exceto para aqueles produtores de tipo  $\bar{h}$ , as escolhas da área cultivada e do tamanho do estabelecimento são distorcidas.

**Proposição 4:** *Sob informação assimétrica, a solução do problema de taxaçaõ ótima pode ser descentralizada por um menu de impostos lineares da forma*

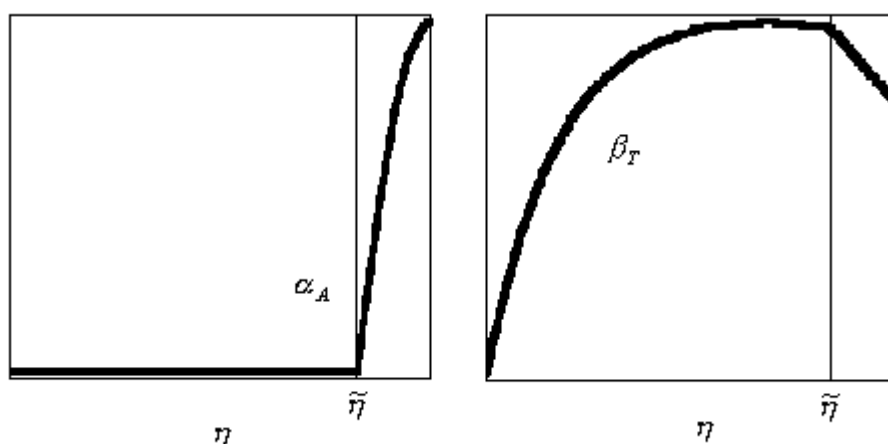
$$a_A q Q(A) + b_T T + g_{(A,T)},$$

onde  $a_A = 0$  para todo  $A \in [\underline{\tilde{A}}, \bar{\tilde{A}}]$ . Nesse esquema, o governo oferece  $(a_A, b_T, g_{(A,T)})$  observando o produto  $qQ(A)$  e o tamanho do estabelecimento  $T$ . E os proprietários, maximizando lucro, determinam  $A$  e  $T$  de acordo com as condições da Proposição 3.

As proposições acima mostram que o esquema proposto como solução do modelo com informação completa não é implementável sob assimetria de informação. Essa incapacidade de implementar o ITR como solução do problema com informação assimétrica oferece subsídio teórico ao que o governo observou na comparação dos dados declarados com os dados reais, na década de 80. E é também consistente com o fato de que os pequenos produtores, em geral sem terra ociosa, declaram mais corretamente a utilização de suas terras.

Em uma economia como a brasileira, onde os produtores operam com terra ociosa e o governo não observa com precisão os parâmetros de produtividade das atividades produtivas e especulativas disponíveis aos diversos produtores, a Proposição 4 mostra que não existem alíquotas capazes de fazer com que o ITR consiga implementar o esquema ótimo de tributação. O uso do ICMS torna-se necessário para que aqueles produtores com melhor acesso a atividades de especulação sejam devidamente taxados.

**Figura 5.2 – Alíquotas Ótimas de ICMS e ITR**



A figura 5.2 mostra o formato das alíquotas ótimas de ICMS e ITR que implementam o esquema ótimo de tributação. O ICMS é zero para os produtores que encontram-se restritos por (SC), operando sem terra ociosa. Na medida em que há uma aumento na manutenção de terra ociosa, a alíquota do ICMS cresce en-

quanto observa-se um declínio no ITR. Ainda que o imposto sobre o produto provoque uma distorção na alocação de recursos, o seu uso justifica-se por sua capacidade de compor um mecanismo implementável (ou revelador) de tributação.

## **VI. Conclusão**

A necessidade de uma avaliação do imposto sobre terra decorre de sua importância como instrumento de política agrária, principalmente no Brasil.

A agricultura de países como o Brasil é caracterizada por uma série de imperfeições de mercado que fazem com que o preço da terra seja mais alto que o valor descontado dos fluxos de receita provenientes da atividade agrícola e que o tamanho ótimo dos estabelecimentos seja aumentado. Com isso, observa-se equilíbrios em que grandes propriedades improdutivas convivem com famílias rurais de baixa renda para as quais o preço artificialmente elevado da terra inviabiliza a utilização de todo o seu potencial produtivo.

Caso não haja um combate ao uso não produtivo de terras agricultáveis, os programas de reforma agrária (redistributiva ou via banco da terra) podem ter um efeito apenas transitório. O ITR constitui um instrumento importante para esse objetivo, podendo representar uma melhoria significativa na distribuição de terras, além de financiar outras políticas de combate à pobreza rural. Nesse sentido, a intensificação dos programas de reforma agrária seriam justificadas pela necessidade de catalisadores ao bom funcionamento do mercado.

O modelo apresentado mostra que, em virtude do ITR ser um imposto declaratório, o esquema ótimo de tributação num contexto de informação assimétrica envolve uma composição de imposto sobre a terra e imposto sobre o produto. As

regras atuais, mesmo após a reformulação de 1996, seriam implementáveis apenas se houvesse informação completa ou se não houvesse terra ociosa. Mesmo que não houvesse nenhum problema na administração do imposto, o modelo demonstra a incapacidade do ITR para combater os altos níveis de evasão e sub-tributação.

Ou seja, a discussão sobre a eficácia do ITR precisa ser redirecionada. Além de considerar os aspectos operacionais, vitais para a obtenção dos resultados desejados, a abrangência do instrumento em um ambiente como o da agricultura brasileira também precisa ser questionada. Esse trabalho tenta contribuir para a ampliação do debate sobre a taxação de terras no Brasil, sendo complementar aos demais estudos mencionados na seção II.

E ainda, a sugestão do uso de uma mistura de imposto sobre terra e sobre produto se enquadra perfeitamente na discussão sobre reforma tributária que ocorre atualmente no Brasil. A proposta de atribuir novamente aos Estados a responsabilidade de administração do ITR poderia facilitar o cruzamento das informações referentes aos dois impostos.

Por fim, uma advertência. A análise apresentada utilizou uma estrutura teórica simples e adequada apenas para o estabelecimento dos limites de atuação de um esquema como o do ITR. Mas, diante da proposta de uso do ICMS como uma fonte de informação muito importante, a discussão acerca dos aspectos operacionais volta a ganhar um espaço imprescindível. Apenas uma investigação empírica cuidadosa e detalhada pode determinar os parâmetros de uma nova reformulação.

## Bibliografia

- [1] Arnott, R. J. e J. E. Stiglitz (1979) "Aggregate land rents, expenditure on public goods, and optimal city size", *Quarterly Journal of Economics*, **93**(4): 471-500.
- [2] Brandão, A. S. P. e G. C. Rezende (1992) "Credit subsidies, inflation and the land market in Brazil: a theoretical and empirical analysis", *World Bank*, mimeo.
- [3] Carter, M. R. e D. Mesbah (1993) "Can land market reform mitigate the exclusionary aspects of rapid agroexport growth?", *World Development*, **21**(7): 1085-1100.
- [4] Deininger, K. e G. Feder (1998) "Land institutions and land markets", *World Bank: Policy Research Working Papers* (forthcoming in *Handbook of Agricultural Economics*).
- [5] Feldstein, M. (1980) "Inflation, portfolio choice and the prices of land and corporate stock", *American Journal of Agricultural Economics*, **62**: 910-916.
- [6] Guesnerie, R. e J. J. Laffont (1984) "A complete solution to a class of principal-agent problems with an application to the control of a self-managed firm", *Journal of Public Economics*, **25**: 329-369.
- [7] Hoff, K. (1991) "Land taxes, output taxes, and sharecropping: was Henry George right?", *World Bank Economic Review*, **5**(1): 93-111.
- [8] Hoff, K.; A. Braverman e J. E. Stiglitz (1993) (eds) *The economics of rural organization: theory, practice and policy*. New York: Oxford University Press.
- [9] Lewis, T. e D. Sappington (1989) "Countervailing incentives in agency problems", *Journal of Economic Theory*, **49**: 294-313.
- [10] Mirrlees, J. A. (1971) "An exploration in the theory of optimum income taxation", *Review of Economic Studies*, **38**: 175-208.
- [11] Mirrlees, J. A. (1986) "The theory of optimal taxation". In: *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 3, K. J. Arrow e M. D. Intriligator, eds., Amsterdam: North-Holland.
- [12] Oliveira, J. T. (1993) "O imposto sobre a propriedade territorial rural 1964-1992", *Estudos Econômicos*, **23**: 209-224.
- [13] Reydon, B. P.; A. R. Romeiro e L. A. Plata (2000) "Aspectos da questão agrária brasileira: lições à luz do mercado de terras", Brasília, INCRA/FAO: Projeto UTF/BRA/036/BRA.
- [14] Romeiro, A. R.; B. P. Reydon e L. A. Plata (2000) "Impacto do ITR nos preços da terra na concentração fundiária", Brasília, INCRA/FAO: Projeto UTF/BRA/036/BRA.

- [15] Sayad, J. (1982) “Especulação em terras rurais, efeitos sobre a produção agrícola e o novo ITR”, *Pesquisa e Planejamento Econômico*, **12**(1): 87-108.
- [16] Secretaria de Comunicação de Governo da Presidência da República. *Reforma agrária: compromisso de todos*. Brasília, extraído em 10/06/2000 de [www.planalto.gov.br/secom/colecao/refagr8.htm](http://www.planalto.gov.br/secom/colecao/refagr8.htm).
- [17] Skinner, J. (1991a) “If agricultural land taxation is so efficient, why is it so rarely used?”, *World Bank Economic Review*, **5**(1): 113-133.
- [18] Skinner, J. (1991b) “Prospects for agricultural land taxation in developing countries”, *World Bank Economic Review*, **5**(3): 493-511.

## Apêndice

A versão formal dos argumentos apresentados no artigo encontra-se neste apêndice. Os resultados enunciados nas proposições 1 a 4 são demonstrados rigorosamente, utilizando a notação introduzida pela seção II.

As hipóteses utilizadas no artigo podem ser classificadas em dois grupos. De um lado, tem-se algumas condições que tornam o problema mais próximo da realidade brasileira ou mesmo constituem uma escolha conveniente. Por outro lado, são utilizadas condições técnicas sobre a distribuição dos tipos e sobre as tecnologias de produção agrícola e especulação para que os resultados sejam demonstrados mais facilmente, não comprometendo a natureza dos resultados obtidos.

### Hipóteses:

- **(Monotonicidade da Razão de Verossimilhança):** a função de distribuição é tal que:

$$\frac{d}{dh} \left( \frac{1 - F(h)}{f(h)} \right) < 0. \quad (A1)$$

- **(Propriedade das Tecnologias):** as funções  $q$ ,  $f$  e  $Q$  são tais que, para  $A = T$  e  $k$  suficientemente grande<sup>5</sup>,

$$\dot{q} < 0 \text{ e } \ddot{q} = 0, \quad (\text{A2})$$

$$\dot{q}Q + f > 0, \quad (\text{A3a})$$

$$k\dot{q}Q' + f' > 0, \quad (\text{A3b})$$

$$\frac{\frac{d}{dh} \left( \frac{1-F}{f} \right) f'}{\left[ 1 - \frac{d}{dh} \left( \frac{1-F}{f} \right) \right] \dot{q}Q'} > 1. \quad (\text{A3c})$$

A hipótese (A2) determina que os especuladores tenham uma produtividade agrícola menor, o que encontra-se de acordo com a realidade da agricultura brasileira. Em geral, aqueles produtores com maior acesso à atividade especulativa não são envolvidos inteiramente com a agricultura e, diante das imperfeições do mercado de trabalho, tornam-se menos produtivos.

As hipóteses (A1) e (A3) servem como condições suficientes para que o multiplicador da restrição de escassez seja decrescente e o lucro seja crescente em  $h$ , o que simplifica bastante a caracterização do equilíbrio. As hipóteses (A3a) e (A3b) determinam que um aumento marginal em  $h$  provoca um aumento no ganho e no ganho marginal da atividade especulativa suficientemente maior que o da atividade produtiva. Em outras palavras, a atividade especulativa deve ser suficientemente lucrativa. Dadas as hipóteses (A3a) e (A3b), com  $k = 2$ , note que (A1) e (A3c) são atendidas para o caso da distribuição uniforme.

<sup>5</sup> Na demonstração da Proposição 3', o valor mínimo de  $k$  é determinado.

## Informação Completa

O mecanismo ótimo de taxa  o, quando o governo possui informa  o completa, é definido pelo seguinte programa para cada produtor do tipo  $h \in \Theta$ :

$$\max_{\{t, A, T\}} U \quad (\text{P.FB})$$

sujeito a

$$\Pi \geq 0, \quad (\text{IR})$$

$$A \leq T. \quad (\text{SC})$$

A solução deste programa é definida pelo resultado a seguir.

**Proposição 1'**: Sob informa  o completa, o mecanismo ótimo de taxa  o pode envolver duas categorias de produtores, ou seja, existe no máximo um  $h^*$  tal que

$$\Theta_R = [\underline{h}, h^*] \text{ e } \Theta_I = (h^*, \bar{h}].$$

a) Produtores sem terra ociosa: para todo  $h \in \Theta_R$ ,  $A_h^*$  e  $T_h^*$  são definidas por:

$$\begin{aligned} A_h^* &= T_h^*, \\ qQ'(A_h^*) + (1-l)hf'(T_h^*) &= w + r. \end{aligned} \quad (\text{FB}_R)$$

b) Produtores com terra ociosa: para todo  $h \in \Theta_I$ ,  $A_h^*$  e  $T_h^*$  são definidas por:

$$\begin{aligned} qQ'(A_h^*) &= w, \\ (1-l)hf'(T_h^*) &= r. \end{aligned} \quad (\text{FB}_I)$$

c) Taxa  o: para todo  $h \in \Theta$ ,  $t_h^*$  é definido por:

$$t_h^* = qQ(A_h^*) - wA_h^* + hf(T_h^*) - rT_h^*.$$

**Demonstração da Proposição 1'**. Inicialmente, note que as restrições (IR) são sempre ativas. Caso não seja ativa para algum  $h \in \Theta$ , o governo poderia aumentar

sua receita aumentando  $t_h^*$  até que se torne ativa. Portanto, o programa de maximização com o qual o governo se depara para cada  $h \in \Theta$  é

$$\max qQ(A_h) - wA_h + (1-l)hf(T_h) - rT_h \text{ s.a. } A_h \leq T_h$$

As condições de 1a. ordem (necessárias e suficientes, pois o funcional é côncavo) são dadas por:

$$\begin{aligned} qQ'(A_h) &= w + m_h, \\ (1-l)hf'(T_h) &= r - m_h, \\ m_h(A_h - T_h) &= 0, \quad m_h \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, diferenciando-se  $m_h$ , obtém-se que

$$\begin{aligned} \dot{m}_h &= \dot{q}Q' + qQ''\dot{A}_h \\ &= \frac{(1-l)[h\dot{q}Q'f'' - qQ''f']}{qQ' + (1-l)hf''} < 0 \end{aligned}$$

sob (A2) e haverá, no máximo, um  $h^*$  tal que  $m_{h^*} = 0$ . Desse modo, dependendo das tecnologias das atividades produtiva e especulativa e dos custos de aquisição e operação da terra, pode-se identificar duas categorias de produtores. Os produtores com  $h \in \Theta_R = [\underline{h}, h^*]$  são restritos pela restrição de escassez e operam sem terra ociosa. Os demais produtores, com  $h \in \Theta_I = (h^*, \bar{h}]$ , produzem a quantidade ótima de produtos agrícolas. As condições de 1a. ordem para esses dois grupos são dadas por (FB<sub>R</sub>) e (FB<sub>I</sub>), respectivamente. ♦

O resultado a seguir mostra que este esquema pode ser implementado por um esquema análogo ao do ITR.

**Proposição 2':** Sob informação completa, a solução do problema de taxa  o ótima pode ser descentralizada por um menu de impostos lineares da forma:

$$t_h^* = b_h^* T + g_h^*,$$

onde  $b_h^* = l h f'(T_h^*)$  e  $g_h^* = t_h^* - b_h^* T_h^*$ .

**Demonstração da Proposição 2'.** Considere  $t_h = b_h^* T + g_h^*$ , em que  $b_h^* = l h f'(T_h^*)$  e  $g_h^* = t_h^* - b_h^* T_h^*$ . As condições de 1a. ordem de (P) são:

$$qQ'(A) = w + m_h$$

$$h f'(T) = r + b_h^* - m_h$$

Considerando a definição de  $b_h^*$  pode-se verificar que o sistema torna-se equivalente ao sistema das condições de 1a. ordem de (P.FB). O valor de  $g_h^*$  é ajustado residualmente. ♦

## Informação Assimétrica

A primeira vista, o problema do governo sob informa  o assimétrica não   tratável dada a complexidade dos mecanismos de taxa  o possíveis. Entretanto, pode-se utilizar um resultado conhecido como *Pr nc pio da Revelação* para simplificar o problema e torná-lo manipulável. Segundo este resultado, qualquer equilíbrio Bayesiano deste jogo de informa  o incompleta pode ser replicado por um mecanismo direto e revelador da verdade [Mirrlees (1971)].

O pr nc pio da revelação implica que o governo pode concentrar-se nos esquemas declaratórios e, com base na informa  o declarada pelo agente,  $\hat{h}$ , determinar a alocação  $(t_{\hat{h}}, A_{\hat{h}}, T_{\hat{h}})$  com o objetivo de induzir a revelação do verdadeiro

valor de  $h$ . Seja  $\Pi(\hat{h} | h)$  o lucro do agricultor do tipo  $h$  que declara ser do tipo  $\hat{h}$ , isto é,

$$\Pi(\hat{h} | h) = q Q(A_{\hat{h}}) - w A_{\hat{h}} + h f(T_{\hat{h}}) - r T_{\hat{h}} - t_{\hat{h}}, \quad \forall (h, \hat{h}) \in [\underline{h}, \bar{h}]^2.$$

Então pode-se definir:

**Definição:** Uma alocação  $(t_h, A_h, T_h)$  é implementável se, e somente se,

$$\Pi(h | h) \geq \Pi(\hat{h} | h) \quad \forall (h, \hat{h}) \in [\underline{h}, \bar{h}]^2. \quad (IC)$$

O foco do governo nos contratos implementáveis é introduzido no modelo a partir do seguinte resultado, bastante utilizado na literatura [Guesnerie e Laffont (1984)].

**Lema:** Se uma alocação  $(t_h, A_h, T_h)$  é implementável, isto é, satisfaz (IC), e é  $C^1$  por partes, então

$$\frac{d}{dh} \Pi(h | h) = \dot{q} Q(A_h) + f(T_h), \quad (IC^1)$$

e

$$\dot{q} Q'(A_h) \dot{A}_h + f'(T_h) \dot{T}_h \geq 0, \text{ q.t.p. em } [\underline{h}, \bar{h}]. \quad (IC^2)$$

**Demonstração do Lema.** Seja  $(t_h, A_h, T_h)$  uma alocação implementável e  $C^1$  por partes. Então, para todo  $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$  tem-se que

$$\Pi(h | h) \geq \Pi(\hat{h} | h) = \Pi(\hat{h} | \hat{h}) + (q - \hat{q}) Q(A_{\hat{h}}) + (h - \hat{h}) f(T_{\hat{h}})$$

onde  $\hat{q} \equiv q(\hat{h})$ . Portanto,

$$\Pi(h | h) - \Pi(\hat{h} | \hat{h}) \geq (q - \hat{q}) Q(A_{\hat{h}}) + (h - \hat{h}) f(T_{\hat{h}})$$

e, invertendo  $h$  e  $\hat{h}$ , obtém-se

$$(q - \hat{q})Q(A_h) + (h - \hat{h})f(T_h) \geq \Pi(h|h) - \Pi(\hat{h}|\hat{h}) \geq (q - \hat{q})Q(A_{\hat{h}}) + (h - \hat{h})f(T_{\hat{h}}).$$

Dividindo a desigualdade acima por  $(h - \hat{h})$  e tomando  $\hat{h} \rightarrow h$ , tem-se que  $\Pi$  é  $C^1$  por partes e

$$\frac{d}{dh} \Pi(h|h) = \dot{q}Q(A_h) + f(T_h) \quad q.t.p.$$

e, fazendo o mesmo para  $(h - \hat{h})^2$ ,

$$\dot{q}Q'(A_h)\dot{A}_h + f'(T_h)\dot{T}_h \geq 0 \quad q.t.p. \quad \blacklozenge$$

Sob (A3a), tem-se que  $\Pi(h|h)$  é sempre crescente em  $h$  e em equilíbrio apenas a  $(IR_h)$  é ativa, determinando  $\Pi(\underline{h}|\underline{h}) = 0$ . Integrando  $(IC^1)$  por partes e substituindo na função objetivo do governo, o programa de maximização pode ser reescrito como:

$$\max_{\{t_h, A_h, T_h\}_{h \in [\underline{h}, \bar{h}]}} \int_{\underline{h}}^{\bar{h}} \left[ q Q(A_h) - wA_h + (1-l)hf(T_h) - rT_h - \frac{1-F(h)}{f(h)} (\dot{q}Q(A_h) + f(T_h)) \right] dF(h)$$

sujeito a

**(P.SB)**

$$\dot{q}Q'(A_h)\dot{A}_h + f'(T_h)\dot{T}_h \geq 0, \quad (IC^2)$$

$$A_h \leq T_h, h \in [\underline{h}, \bar{h}]. \quad (SC_h)$$

A solução do modelo com informação assimétrica pode ser dada então pela seguinte proposição.

**Proposição 3':** Sob (A1)-(A3) o esquema ótimo de tributação  $(\tilde{t}_h, \tilde{A}_h, \tilde{T}_h)$  do programa (P.SB), ignorando a  $(IC^2)$ , tem as seguintes características:

- i) existem no máximo 2 categorias de produtores, isto é,  $\tilde{\Theta}_R = [\underline{h}, \tilde{h}]$  e  $\tilde{\Theta}_I = (\tilde{h}, \bar{h}]$ ;
- ii) em  $\tilde{\Theta}_R$ ,  $(\tilde{A}_h, \tilde{T}_h)$  são determinados por

$$\tilde{A}_h = \tilde{T}_h,$$

$$q Q'(\tilde{A}_h) + (1-l)h f'(\tilde{T}_h) = w + r + \frac{1-F(h)}{f(h)} (q Q'(\tilde{A}_h) + f'(\tilde{T}_h)); \quad (SB_1)$$

$$\text{com } \dot{A}_h = \dot{T}_h > 0.$$

iii) em  $\tilde{\Theta}_I$ ,  $(\tilde{A}_h, \tilde{T}_h)$  são determinados por

$$\begin{aligned} q Q'(\tilde{A}_h) &= w + \frac{1-F(h)}{f(h)} q Q'(\tilde{A}_h), \\ (1-l)h f'(\tilde{T}_h) &= r + \frac{1-F(h)}{f(h)} f'(\tilde{T}_h); \end{aligned} \quad (SB_2)$$

$$\text{com } \dot{T}_h > 0 \text{ e } \dot{A}_h < 0.$$

$$iv) \quad \tilde{t}_h = q Q(\tilde{A}_h) - w \tilde{A}_h + h f(\tilde{T}_h) - r \tilde{T}_h - \int_h^h [q Q(\tilde{A}_h) + f(\tilde{T}_h)] d\tilde{h};$$

$$v) \quad \Pi(h) = \int_h^h [q Q(\tilde{A}_h) + f(\tilde{T}_h)] d\tilde{h};$$

vi) para todo  $h \in [\underline{h}, h^*]$  tem-se que  $\tilde{A}_h < A_h$  e  $\Theta_R \subset \tilde{\Theta}_R$ , ou seja, a assimetria de informação tende a aumentar a proporção de produtores restritos.

vii)  $(\tilde{t}_h, \tilde{A}_h, \tilde{T}_h)$  é implementável, ou seja, é a solução de  $(P.SB)$ .

**Demonstração da Proposição 3'.** As condições de 1a. ordem do programa  $(P.SB)$ ,

ignorando a  $(IC^2)$ , são dadas por:

$$q Q'(A_h) = w + \frac{1-F(h)}{f(h)} q Q'(A_h) + \frac{m_h}{f(h)},$$

$$(1-l)h f'(T_h) = r + \frac{1-F(h)}{f(h)} f'(T_h) - \frac{m_h}{f(h)},$$

$$m_h (A_h - T_h) = 0, \quad A_h \leq T_h.$$

a) Defina  $\Theta_R = \{h : m_h > 0\}$  e, então, para todo  $h \in \Theta_R$ ,  $\tilde{A}_h = \tilde{T}_h$  e as condições de 1a. ordem são dadas por

$$qQ'(\tilde{A}_h) + (1-l)hf'(\tilde{T}_h) = w + r + \frac{1-F(h)}{f(h)}[\dot{q}Q'(\tilde{A}_h) + f'(\tilde{T}_h)],$$

$$\frac{m_h}{f(h)} = qQ'(\tilde{A}_h) - w - \frac{1-F(h)}{f(h)}\dot{q}Q'(\tilde{A}_h)$$

Diferenciando a primeira condição com respeito a  $h$ , obtém-se:

$$\dot{A} = \dot{T} = \frac{\left[ \frac{d}{dh} \left( \frac{1-F}{f} \right) - 1 \right] \dot{q}Q' + \left[ \frac{d}{dh} \left( \frac{1-F}{f} \right) - (1-l) \right] f'}{\left( q - \frac{1-F}{f} \dot{q} \right) Q'' + \left( (1-l)h - \frac{1-F}{f} \right) f''} > 0$$

sob (A1), (A2) e (A3), usando o fato que o denominador é negativo devido à condição de 2a. ordem. E, diferenciando  $m_h$ , tem-se que estas hipóteses determinam

$$\left( \frac{\dot{m}_h}{f(h)} \right) = \left( q - \frac{1-F}{f} \dot{q} \right) Q'' \dot{A} + \left( 1 - \frac{d}{dh} \left( \frac{1-F}{f} \right) \right) \dot{q}Q' < 0,$$

o que demonstra as partes (i) e (ii).

b) Seja  $\Theta_I = \Theta - \Theta_R$ . Então, para todo  $h \in \Theta_I$ , as condições de 1ª ordem são:

$$qQ'(\tilde{A}_h) = w + \frac{1-F(h)}{f(h)}\dot{q}Q'(\tilde{A}_h)$$

$$(1-l)hf'(\tilde{T}_h) = r + \frac{1-F(h)}{f(h)}f'(\tilde{T}_h)$$

E o item (iii) está demonstrado, com

$$\dot{A}_h = - \frac{\left[ 1 - \frac{d}{dh} \left( \frac{1-F}{f} \right) \right] \dot{q}Q'}{\left( q - \frac{1-F}{f} \dot{q} \right) Q''} < 0 \quad (*)$$

$$\dot{T}_h = - \frac{\left[ (1-l) - \frac{d}{dh} \left( \frac{1-F}{f} \right) \right] f'}{\left[ (1-l)h - \frac{1-F}{f} \right] f''} > 0$$

Em particular,  $A$  é decrescente e  $T$  é crescente em  $\Theta_I$ . Para demonstrar os itens (iv) e (v) basta utilizar a  $(IC^1)$ .

O item (vi) decorre da comparação entre as condições que determinam  $A_h^*$  e  $\tilde{A}_h$  em  $\Theta_R$  e  $\tilde{\Theta}_R$ , respectivamente. Sob (A2),  $\dot{q} < 0$  e, assim,  $A_h^* > \tilde{A}_h$  em  $[h, \min(h^*, \tilde{h})]$ . Considerando essa desigualdade nas condições que determinam  $\Theta_R$  e  $\tilde{\Theta}_R$ , obtém-se que  $\Theta_R \subset \tilde{\Theta}_R$ .

Para mostrar que  $(\tilde{t}_h, \tilde{A}_h, \tilde{T}_h)$  é implementável, observe inicialmente que

$$\begin{aligned} \Pi(h|h) - \Pi(\tilde{h}|h) &= \int_{\tilde{h}}^h [\dot{q}Q(\tilde{A}_{\tilde{h}}) + f(\tilde{T}_{\tilde{h}})]d\tilde{h} + (\hat{q} - q)Q(\tilde{A}_{\tilde{h}}) + (\tilde{h} - h)f(\tilde{T}_{\tilde{h}}) \\ &= \int_{\tilde{h}}^h [\dot{q}(Q(\tilde{A}_{\tilde{h}}) - Q(\tilde{A}_{\tilde{h}})) + (f(\tilde{T}_{\tilde{h}}) - f(\tilde{T}_{\tilde{h}}))]d\tilde{h} \\ &= \int_{\tilde{h}}^h \left[ \int_{\tilde{A}_{\tilde{h}}}^{\tilde{A}_{\tilde{h}}} \dot{q}Q'(A)dA + \int_{\tilde{T}_{\tilde{h}}}^{\tilde{T}_{\tilde{h}}} f'(T)dT \right] d\tilde{h}, \end{aligned}$$

sendo que a última igualdade decorre de (A2). Considerando  $\tilde{h} < h$ , existem três possibilidades:

- $h, \tilde{h} \in \Theta_R$ : nesse intervalo,  $\tilde{A}_{\tilde{h}} = \tilde{T}_{\tilde{h}}$  e então

$$\Pi(h|h) - \Pi(\tilde{h}|h) = \int_{\tilde{h}}^h \int_{\tilde{A}_{\tilde{h}}}^{\tilde{A}_{\tilde{h}}} [\dot{q}Q'(A) + f'(A)]dAd\tilde{h}$$

que é positivo por (A3b).

- $h, \tilde{h} \in \Theta_I$  : por (\*), tem-se que  $Q(\tilde{A}_{\tilde{h}}) < Q(\tilde{A}_h)$  e  $f(\tilde{T}_{\tilde{h}}) > f(\tilde{T}_h)$  para todo  $\tilde{h} \in [\tilde{h}, h]$  e, então,  $\Pi(h | h) > \Pi(\tilde{h} | h)$ .
- $\tilde{h} \in \Theta_R, h \in \Theta_I$  : nesse caso, tem-se que:

$$\Pi(h | h) - \Pi(\tilde{h} | h) = \int_{\tilde{h}}^h \left[ \int_{\tilde{A}_{\tilde{h}}}^{\tilde{A}_{\tilde{h}}} \dot{q} Q'(A) dA + \int_{\tilde{T}_{\tilde{h}}}^{\tilde{T}_{\tilde{h}}} f'(T) dT \right] d\tilde{h}$$

$$= \int_{\tilde{h}}^h \left[ \int_{\tilde{A}_{\tilde{h}}}^{\tilde{A}_{\tilde{h}}} \dot{q} Q'(A) + f'(A) dA \right] d\tilde{h} + \int_{\tilde{h}}^h \left[ \dot{q} (Q(\tilde{A}_{\tilde{h}}) - Q(\tilde{A}_{h^*})) + (f(\tilde{T}_{\tilde{h}}) - f(\tilde{T}_{h^*})) \right] d\tilde{h} \geq 0,$$

pois, pelos argumentos anteriores, as duas integrais são não-negativas.

O caso  $\tilde{h} > h$  é análogo. ♦

A hipótese (A3) serve como condição suficiente para que o lucro dos produtores, em equilíbrio, seja crescente em  $h$ . Essas são condições de suficiência para que a restrição (IC<sup>2</sup>) não seja ativa no ótimo. Caso contrário, é necessária a aplicação do princípio de “ironing”, o que apenas complica a caracterização do esquema de impostos ótimo, sem implicações mais importantes.

**Proposição 4’:** *Sob informação assimétrica, a solução do problema de taxaço ótima pode ser descentralizada por um menu de impostos lineares da forma*

$$a_A q Q(A) + b_T T + g_{(A,T)},$$

onde

$$a_A = \begin{cases} 0 & \text{se } A \in [\tilde{A}_h, \tilde{A}_{\tilde{h}}] \\ \frac{-1}{Q(A)} \int_A^{\tilde{A}_{\tilde{h}}} \left[ \frac{1-F(h(\tilde{A}))}{f(h(\tilde{A}))} \frac{\dot{q}}{q} Q'(\tilde{A}) \right] d\tilde{A} & \text{se } A \in [\tilde{A}_{\tilde{h}}, \tilde{A}_h] \end{cases}$$

$$b_T = \begin{cases} b \frac{\tilde{T}_h}{T} + \frac{1}{T} \int_{T_h}^T \left[ l h(\tilde{T}) f'(\tilde{T}) + \frac{1-F(h(\tilde{T}))}{f(h(\tilde{T}))} (\dot{q} Q'(\tilde{T}) + f'(\tilde{T})) \right] d\tilde{T} & \text{se } T \in [\tilde{T}_h, \tilde{T}_{\tilde{h}}] \\ b \frac{\tilde{T}_{\tilde{h}}}{T} + \frac{1}{T} \int_{T_{\tilde{h}}}^T \left[ l h(\tilde{T}) f'(\tilde{T}) + \frac{1-F(h(\tilde{T}))}{f(h(\tilde{T}))} f'(\tilde{T}) \right] d\tilde{T} & \text{se } T \in [\tilde{T}_{\tilde{h}}, \tilde{T}_h] \end{cases}$$

e  $h(T)$  e  $h(A)$  são as inversas de  $\tilde{T}_h$  e  $\tilde{A}_h$ , respectivamente.

Neste esquema, o governo oferece  $(a_A, b_T, g_{(A,T)})$  observando o produto  $qQ(A)$  e o tamanho do estabelecimento  $T$ . E os proprietários, maximizando lucro, determinam  $A$  e  $T$  de acordo com  $(SB_1)$  e  $(SB_2)$ .

**Demonstração da Proposição 4'.** Defina  $q = qQ(A)$ . Observe inicialmente que os mecanismos em  $(q, T, t)$  e  $(A, T, t)$  são equivalentes. Como  $Q' > 0$ , a inversa  $A = Q^{-1}\left(\frac{q}{Q}\right)$  está bem definida e, ao desenhar o mecanismo  $(q, T, t)$ , o problema relaxado do governo é dado por

$$\max_{\{t_h, q_h, T_h\}_{h \in [\underline{h}, \bar{h}]}} \int_{\underline{h}}^{\bar{h}} \left[ q_h - w Q^{-1}\left(\frac{q_h}{Q}\right) + (1-l) h f(T_h) - r T_h - \frac{1-F(h)}{f(h)} \left( \frac{\dot{q}}{q} q_h + f(T_h) \right) \right] dF(h)$$

sujeito a

$$Q^{-1}\left(\frac{q_h}{Q}\right) \leq T_h, h \in [\underline{h}, \bar{h}].$$

A condição de 1a. ordem para  $q$  é

$$1 - w \frac{1}{Q'(A_h)} \frac{1}{q} - \frac{1-F(h)}{f(h)} \frac{\dot{q}}{q} - \frac{m_h}{f(h) Q'(A_h)} \frac{1}{q} = 0$$

que pode ser arranjada para

$$qQ'(A_h) = w + \frac{1-F(h)}{f(h)} \dot{q}Q'(A_h) + \frac{m_h}{f(h)}.$$

Como a condição para  $T$  se mantém inalterada, fica demonstrado que basta considerar a implementação em  $(A, T, t)$ , que é algebricamente mais simples. De fato, considerar  $q$  ou  $A$  é questão de conveniência, uma vez que existe uma inversa bem definida para  $Q$ .

Considere então um mecanismo em que para cada par  $(A, T)$  apresentado pelo produtor, o imposto seja calculado por

$$t(A, T) = a_A qQ(A) + b_T T + g_{(A, T)},$$

onde  $a_A \equiv a(A)$ ,  $b_T \equiv b(T)$  e  $g_{(A, T)} \equiv g(A, T)$  definem o esquema de taxaço a ser determinado pelo governo. Neste esquema,  $a_A$  faz com que  $A = \tilde{A}_h$  (ou  $q = qQ(\tilde{A}_h)$ ),

$b_T$  é tal que  $T = \tilde{T}_h$  e  $g_{(A, T)}$  é determinado residualmente por

$$g_{(A, T)} = \begin{cases} \left( q(\tilde{h}(T)) - a_{A_{\tilde{h}(T)}} q \right) Q(\tilde{A}_{\tilde{h}(T)}) + \tilde{h}_{(T)} f(T) - w \tilde{A}_{\tilde{h}(T)} - (r + b_T) T + \int_{\tilde{h}(T)}^{\tilde{h}} [\dot{q}Q(\tilde{A}_{\tilde{h}}) + f(\tilde{T}_{\tilde{h}})] d\tilde{h} - \Pi(\tilde{h}), \\ \text{se } T = \tilde{T}_{\tilde{h}} \text{ e } A = \tilde{A}_{\tilde{h}} \text{ para algum } \tilde{h} \in [\underline{h}, \bar{h}] \\ \infty, \quad \text{caso contrário;} \end{cases}$$

onde  $\tilde{h}(T)$  é a inversa de  $\tilde{T}_{\tilde{h}}$  que está bem definida pois, sob (A1)-(A3),  $\tilde{T}$  é monótono em  $\tilde{h}$ .

Diante deste esquema, o produtor escolhe  $(A, T)$  de modo a maximizar os seus lucros segundo o programa

$$\max_{A, T} (1 - a_A) qQ(A) + h f(T) - wA - (r + b_T) T - g_{(A, T)}$$

sujeito a

$$A \leq T.$$

Denotando por  $m$  o multiplicador da restrição, as condições de 1a. ordem são dadas por

$$(1 - a_A)qQ'(A) = w + \left( \frac{\partial}{\partial A} a_A \right) qQ(A) + \frac{\partial}{\partial A} g_{(A,T)} + m$$

$$hf'(T) = r + b_T + \left( \frac{\partial}{\partial T} b_T \right) T + \frac{\partial}{\partial T} g_{(A,T)} - m$$

Suponha inicialmente que  $\frac{\partial}{\partial A} g_{(A_h, T_h)} = \frac{\partial}{\partial T} g_{(A_h, T_h)} = 0$  ao longo da curva  $\tilde{h} \rightarrow (\tilde{A}_h, \tilde{T}_h)$ .

a) Caso  $m > 0$ :  $A = T$  e as condições de 1a. ordem tornam-se

$$(1 - a_A)qQ'(A) + hf'(T) = w + \left( \frac{\partial}{\partial A} a_A \right) qQ(A) + r + b_T + \left( \frac{\partial}{\partial T} b_T \right) T + \frac{\partial}{\partial A} g_{(A,T)} + \frac{\partial}{\partial T} g_{(A,T)}$$

e  $A = T = \tilde{A}_h = \tilde{T}_h$  se

$$a_A = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} b_T \right) \tilde{T}_h + b_T = hf'(\tilde{T}_h) + \frac{1 - F(h)}{f(h)} [qQ'(\tilde{A}_h) + f'(\tilde{T}_h)].$$

Ou seja, considerando  $b_{T_h} = \underline{b}$ ,

$$b_T = \underline{b} \frac{\tilde{T}_h}{T} + \frac{1}{T} \int_{\tilde{T}_h}^T \left[ hf'(\tilde{T}) + \frac{1 - F(h(\tilde{T}))}{f(h(\tilde{T}))} (qQ'(\tilde{T}) + f'(\tilde{T})) \right] d\tilde{T}.$$

b) Caso  $m = 0$ : para que  $A = \tilde{A}_h$  e  $T = \tilde{T}_h$  basta que

$$a_A Q'(\tilde{A}_h) + \left( \frac{\partial}{\partial A} a_A \right) Q(\tilde{A}_h) = \frac{1 - F(h)}{f(h)} \frac{\dot{q}}{q} Q'(\tilde{A}_h)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} b_T \right) \tilde{T}_h + b_T = hf'(\tilde{T}_h) + \frac{1 - F(h)}{f(h)} f'(\tilde{T}_h).$$

Ou seja, considerando  $a_{\tilde{A}_h} = 0$  e  $b_{\tilde{T}_h}$  dados pelo caso  $m > 0$ , tem-se que

$$a_A = \frac{1}{Q(A)} \int_A^{\tilde{A}_h} \left[ \frac{F(h(\tilde{T}))}{f(h(\tilde{T}))} \frac{\dot{q}}{q} Q'(\tilde{A}) \right] d\tilde{A}$$

$$b_T = b_{\tilde{T}_h} \frac{\tilde{T}_h}{T} + \frac{1}{T} \int_{\tilde{T}_h}^T \left[ l h(\tilde{T}) f'(\tilde{T}) + \frac{1 - F(h(\tilde{T}))}{f(h(\tilde{T}))} f'(\tilde{T}) \right] d\tilde{T}$$

onde  $h$  pode ser expresso em termos de  $T$  ou de  $A$ .

Resta mostrar que, em ambos os casos,  $\frac{\partial}{\partial A} g(\tilde{A}_h, \tilde{T}_h) = \frac{\partial}{\partial T} g(\tilde{A}_h, \tilde{T}_h) = 0$  ao longo

da curva  $\hat{h} \rightarrow (\tilde{A}_h, \tilde{T}_h)$ . Isto é consequência de um argumento de envelope. Como há

uma bijecção entre  $h$  e  $A$ , e entre  $h$  e  $T$  em cada caso, basta mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial h} g(\tilde{A}_h, \tilde{T}_h) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial h} g(A_h, T_h) = \left[ qQ' - w - q \frac{\partial}{\partial A} (a_A Q) \right] \dot{A} + \left[ h f' - r - \frac{\partial}{\partial T} (b_T T) \right] \dot{T}$$

em  $A = \tilde{A}_h$  e  $T = \tilde{T}_h$  tem-se que os dois termos em colchetes se anulam.

Como o problema do produtor diante deste esquema pode ser mapeado no problema anterior da Proposição 3, as condições de primeira ordem são suficientes para a caracterização do ótimo. ♦