

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

ESTIMANDO A ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS COM AJUSTE PARA A LIQUIDEZ

Ricardo Antunes Chrysóstomo de Avillez
Matrícula: 0520181-6

Professor Orientador: Luciano Vereda

20/06/2008



**DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO**

ESTIMANDO A ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS COM AJUSTE PARA A LIQUIDEZ

Ricardo Antunes Chrysóstomo de Avillez
Matrícula: 0520181-6

Professor Orientador: Luciano Vereda

20/06/2008

“Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realizá-lo, a nenhuma forma de ajuda, exceto quando autorizado pelo professor tutor”.

“As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor”.

AGRADECIMENTOS

Ao Departamento de Economia, pelo ambiente de excelência acadêmica.

Aos professores Antônio Marcos Ambrózio, Luciano Vereda, Marcelo de Paiva Abreu, Márcio Garcia, Marco Cavalcanti, Rodrigo Soares e Walter Novaes pelas ótimas aulas.

Ao meu orientador Luciano Vereda, pelas idéias, pela imensa ajuda e pela disponibilidade em me orientar.

Ao meu analista, Alexandre Belfort.

Aos meus pais, pela paciência.

Dedico esta monografia ao meu avô, Aury de Avillez.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	7
2. MOTIVAÇÃO	9
3.1. CONCEITOS BÁSICOS.....	10
3.1.1. TAXA ZERO CUPOM	10
3.1.2. <i>YIELD TO MATURITY</i>	11
3.1.3. ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS.....	11
3.1.4. TAXA FORWARD.....	15
3.1.5. TAXA FORWARD INSTANTÂNEA.....	18
3.2. O MODELO DE NELSON & SIEGEL.....	18
3.3. AJUSTE PARA A LIQUIDEZ.....	20
4. O MERCADO BRASILEIRO DE DI-1 E DE SWAP DI-PRÉ.....	24
5. ESTIMAÇÃO DA ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS	27
5.1. FONTE DE DADOS	27
5.2. ESTIMANDO O MODELO DE NELSON & SIEGEL	27
6. CONCLUSÃO.....	39
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	41
8. OUTRAS REFERÊNCIAS.....	43

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1: ETTJ BRASILEIRA OBSERVADA NO DIA 07/05/2008.....	12
TABELA 2: ETTJ BRASILEIRA COMPLETA DO DIA 07/05/2008.....	14
TABELA 3: TAXAS FORWARD DA ETTJ BRASILEIRA COMPLETA DO DIA 07/05/2008.....	17
TABELA 4: PESOS.....	31
TABELA 5: GRID - R^2 PARA DIFERENTES τ	33
TABELA 6: PARÂMETROS DAS ETTJS ESTIMADAS.....	36
TABELA 7: ERRO ABSOLUTO MÉDIO (EAM) - VÉRTICES LÍQUIDOS.....	36
TABELA 8: ERRO ABSOLUTO MÉDIO (EAM) - VÉRTICES ILÍQUIDOS.....	37

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: ETTJ BRASILEIRA OBSERVADA NO DIA 07/05/2008.....	12
FIGURA 2: ETTJ BRASILEIRA COMPLETA DO DIA 07/05/2008.....	14
FIGURA 3: TAXAS FORWARD DA ETTJ BRASILEIRA COMPLETA DO DIA 07/05/2008.....	17
FIGURA 4: IMPACTO DOS PARÂMETROS DO MODELO DE N&S PARA DIFERENTES MATURIDADES.....	20
FIGURA 5: TANGENTE HIPERBÓLICA.....	22
FIGURA 6: VOLUME NEGOCIADO & NÚMERO DE NEGÓCIOS - ACUMULADO 12 MESES.....	29
FIGURA 7: ETTJS ESTIMADAS – $\tau = 150$	35

1. INTRODUÇÃO

A estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) é um instrumento de grande importância na avaliação da economia e de suas expectativas futuras. Ross, Westerfield & Jordan (2000) definem a ETTJ como sendo uma representação da relação existente entre as taxas de juros *nominais* pagas por obrigações de cupom zero sem risco de default e as diferentes maturidades de cada obrigação. Assim, a ETTJ reflete o valor puro do dinheiro no tempo para maturidades distintas. Ao desenhar o comportamento da taxa de juros nominal para obrigações de várias maturidades, a ETTJ pode ser usada – em conjunto com outros instrumentos – para inferir informações sobre expectativas de inflação, juros reais, atuação esperada do COPOM nas próximas reuniões, atual prêmio de risco de variação da taxa de juros etc. Além disso, a ETTJ pode ser usada para identificar diferenças entre o valor de mercado e o valor teórico de um título, apontando para possíveis estratégias de investimento decorrentes de erros de apreçamento de ativos (“*mispricing*”).

Em países desenvolvidos, a estimação da ETTJ é razoavelmente fácil e tem alto grau de precisão, pois há um mercado secundário bem desenvolvido e líquido para títulos públicos. No caso de países em desenvolvimento, a situação não é tão simples assim. O mercado secundário não é, geralmente, tão bem estruturado, havendo apenas um conjunto pequeno de títulos líquidos. Os títulos ilíquidos, por sua vez, são negociados no mercado a preços que carregam um “prêmio de iliquidez”. Como uma ETTJ estimada apenas a partir de uma quantidade muito pequena de títulos líquidos pode não ser muito significativa – pois possui poucos vértices –, frequentemente títulos ilíquidos também são utilizados para estimar a ETTJ. Subramanian (2001) ressalta, no entanto, que títulos líquidos e ilíquidos são classes heterogêneas de ativos, o que pode acarretar distorções consideráveis na ETTJ estimada. Para lidar com esta questão, Subramanian (2001) buscou estimar a ETTJ de obrigações do governo indiano com uma função objetivo ponderada pela liquidez dos ativos, obtendo resultados promissores.

Esta monografia se propõe a verificar se o método desenvolvido por Subramanian (2001) é capaz de gerar estimativas da ETTJ do Brasil mais acuradas do que aquelas obtidas por uma estimação “convencional” da ETTJ. Em outras palavras: se incorporarmos

¹ Explicamos o que estamos chamando de estimação “convencional” da ETTJ mais a frente, na terceira seção.

um termo de ponderação pela liquidez dos ativos na função objetivo usada para estimar a ETTJ, o ajuste entre o *yield* teórico e o *yield* de mercado *dos ativos líquidos* melhora significativamente?

O presente trabalho encontra-se dividido em seis seções, incluindo esta introdução. A segunda seção explicita algumas motivações importantes para o estudo da ETTJ. A terceira seção introduz conceitos básicos, apresenta o modelo de Nelson & Siegel (N&S) (1987) – que foi o modelo usado para ajustar os dados coletados – e, por fim, discute os principais pontos do artigo de Subramanian (2001). A quarta seção descreve os mercados de DI-1 e de Swap DI-Pré no Brasil, pois foram dados destes mercados que serviram de base para o trabalho. A quinta seção realiza a estimação da ETTJ brasileira, inicialmente por Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) e, depois, por Mínimos Quadrados Ponderados (MQP), incorporando o ajuste pela liquidez sugerido por Subramanian (2001). A sexta seção elenca as conclusões.

2. MOTIVAÇÃO

A ETTJ é um instrumento fundamental na avaliação de ativos de renda fixa. Existem vários motivos que sublinham a importância de se estudar os diferentes métodos de estimação da ETTJ, as vantagens e desvantagens de cada método e as formas de tornar a estimação mais precisa. Prado (2004) ressalta quatro motivos:

1) Previsão – A ETTJ ajuda a prever o comportamento futuro das taxas de juros nominais de curto prazo, traz informações sobre expectativas de inflação e pode ajudar, ainda, na previsão do nível de atividade econômica.

2) Política Monetária - A ETTJ afeta de forma inequívoca o mercado de crédito de um país. As taxas de juros livres de risco para diferentes maturidades expressas pela ETTJ funcionam como um “pisso” para o custo do crédito. Afinal, ao emprestar dinheiro o credor cobra não apenas a taxa de juros livre de risco, mas também um *spread*, que varia de acordo com a probabilidade de *default* do tomador. Conseqüentemente, a ETTJ afeta a economia como um todo: do consumo das famílias aos planos de investimento de grandes empresas.

3) Gerenciamento da Dívida Pública – Ao indicar o valor que o mercado está atribuindo a obrigações de diferentes maturidades, a ETTJ indica o custo de emissão de novos títulos de dívida do governo com maturidades semelhantes.

4) Gerenciamento de Risco e Apreçamento de Derivativos – Bancos e outras instituições financeiras possuem carteiras de títulos pré-fixados, que estão sujeitas ao risco de variação de taxa de juros. Para avaliar a magnitude deste risco, é necessário que a instituição financeira estime a ETTJ. Além disso, a estimação da ETTJ é peça fundamental no apreçamento de derivativos.

3. ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

Nesta seção, definimos conceitos básicos relacionados à ETTJ, apresentamos as principais características do modelo de N&S e discutimos a proposta de Subramanian (2001) de ajuste da ETTJ pela liquidez dos ativos.

3.1. CONCEITOS BÁSICOS

Inicialmente, definimos alguns dos principais conceitos relacionados à ETTJ utilizados ao longo deste trabalho. Em especial, definimos os conceitos de taxa zero cupom, *yield to maturity*, ETTJ, taxa forward e taxa forward instantânea.

3.1.1. TAXA ZERO CUPOM

Um título que não realiza nenhum pagamento intermediário (*cupom*, no jargão de mercado), fazendo um único pagamento igual ao seu valor de face na data de sua maturidade é chamado de *título zero cupom*. Um título deste tipo é negociado com um desconto em relação ao seu valor de face. A taxa de juros implícita neste desconto é chamada de *taxa zero cupom*. Mais formalmente, para um título com valor de face normalizado em R\$1,00, temos que:

$$PU \times (1+i)^{\frac{n}{252}} = 1 \rightarrow i = \left(\frac{1}{PU} \right)^{\frac{252}{n}} - 1 \quad (1)$$

, onde PU é o preço unitário do título – isto é, o preço ao qual o título é negociado no mercado – i é a taxa zero cupom e n o número de dias úteis até a maturidade do título. Convém notar que, ao longo deste trabalho, estaremos sempre nos referindo à taxas de juros zero cupom, efetivas e anualizadas de acordo com a convenção de 252 dias úteis/ano.

É importante frisar que nem todas as taxas observadas no mercado são taxas zero cupom. Títulos brasileiros de médio prazo, como NTN-Bs, NTN-Cs e NTN-Fs, pagam cupons semestrais. Taxas obtidas a partir de títulos zero cupom e de títulos com cupom não são imediatamente comparáveis, pois apenas as primeiras refletem o valor puro do dinheiro no tempo para diferentes maturidades. Para torná-las comparáveis, algum método deve ser

utilizado – um exemplo é o método *bootstrap*² –, o que implica um custo computacional a mais, nem sempre desprezível.

3.1.2. YIELD TO MATURITY

Antes de explicarmos o que é *yield to maturity* (*yield*), é preciso que se entenda como ocorre o apuração de um título. Do ponto de vista financeiro, um título é basicamente a promessa de pagamento de um conjunto de fluxos de caixa ao longo do tempo. Para apurarmos um título, temos que somar o valor presente de todos os fluxos de caixa prometidos. Matematicamente:

$$PU = \sum_{n=1}^T \frac{FC_n}{(1+r_n)^{n/252}} \quad (2)$$

, onde FC_n é o fluxo de caixa no período n e r_n é a taxa de desconto no período n . Note-se que nem os fluxos de caixa, nem as taxas de desconto precisam ser constantes ao longo do tempo. O problema é que taxas de desconto variáveis não dão sinais claros da rentabilidade do título. Este problema é resolvido calculando-se o *yield* do título, que é uma taxa fictícia, constante no tempo, que faz com que a soma do valor presente dos fluxos de caixa do título seja igual ao seu preço de mercado. Ou seja:

$$PU = \sum_{n=1}^T \frac{FC_n}{(1+y)^{n/252}} \quad (3)$$

, onde y é o *yield* do título. Assim, o *yield* é uma espécie de taxa de desconto média do título. É interessante notar que no caso de títulos zero cupom o *yield* é sempre igual à taxa zero cupom.

3.1.3. ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

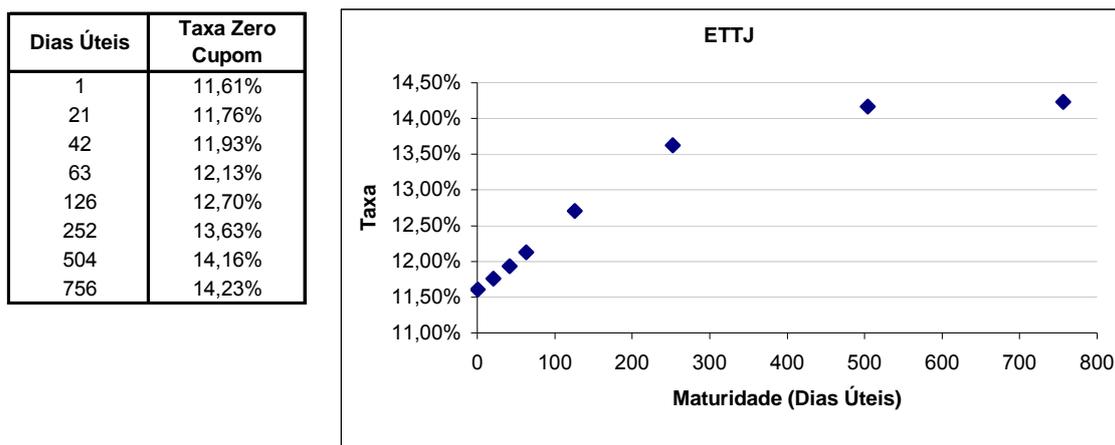
Ross, Westerfield & Jordan (2000) definem a ETTJ como sendo uma representação da relação existente entre as *taxas de juros nominais* pagas por títulos *zero cupom sem risco de default* e as *diferentes maturidades* de cada título. Como estamos falando de títulos sem

² Para detalhes sobre o método *bootstrap*, ver Hull (2006), pp. 82-84.

risco de default, é natural pensar em títulos públicos. Veremos mais a frente, porém, que títulos públicos não são os únicos ativos a partir dos quais podemos construir a ETTJ.

Segundo a definição utilizada, a *ETTJ observada* no mercado poderia ser formada, teoricamente, por um número infinito de pontos. Isto não se verifica na prática. Em um dado momento, apenas um conjunto razoavelmente reduzido de pontos da ETTJ é efetivamente observado. Prado (2004) fornece duas justificativas principais para isto: em primeiro lugar, não existem títulos para todas as maturidades possíveis; em segundo lugar, mesmo que eles existissem, seria altamente improvável que todos os títulos fossem negociados no mesmo dia. Consequentemente, os dados efetivamente observados nos fornecem uma *ETTJ incompleta*. A tabela e o gráfico abaixo mostram um exemplo de ETTJ observada:

Tabela 1/Figura 1: ETTJ brasileira observada no dia 07/05/2008 (fonte: Andima)



Para obtermos uma *ETTJ completa*, devemos estimá-la a partir dos dados observados. Há inúmeros modelos/técnicas que podem ser usados para completar uma ETTJ. Tomando por base Prado (2004) e um artigo do *Bank of International Settlement* (BIS Paper N°25) sobre ETTJ, dividimos estes modelos/técnicas de estimação da ETTJ nas seguintes classificações:

1) Modelos “Ateóricos” x Modelos Teóricos (ou Estruturais)

Prado (2004) sublinha que muitos dos modelos mais comuns utilizados para se estimar uma ETTJ completa não possuem nenhum embasamento econômico. Apenas supõe-se, por exemplo, que a ETTJ pode ser explicada por uma função qualquer,

normalmente um polinômio. Em seguida, os parâmetros da função escolhida são estimados para que produzam o melhor ajuste possível aos dados observados. Estes modelos “ateóricos” têm, por um lado, a grande vantagem de serem flexíveis – afinal, um polinômio de grau suficientemente alto pode garantir um ajuste perfeito aos dados observados. Por outro lado, têm a desvantagem de não obedecerem, necessariamente, restrições de equilíbrio e/ou não-arbitragem.

Modelos teóricos buscam sujeitar a ETTJ à restrições decorrentes de dinâmicas econômicas. Segundo Prado (2004), modelos teóricos são formados por pelo menos duas equações: uma equação define a dinâmica da taxa de curto prazo e outra equação liga a taxa de curto prazo às taxas mais longas. Estes modelos têm duas vantagens principais: em primeiro lugar, são consistentes com condições de não-arbitragem; em segundo lugar, os parâmetros estimados (ex. prêmio de liquidez) têm significado e interesse econômico. Em compensação, estes modelos possuem a desvantagem de, por causa das restrições impostas, não produzirem uma adequação perfeita entre as taxas teóricas estimadas e as taxas observadas.

2) Modelos Paramétricos x Modelos Baseados em *Splines*

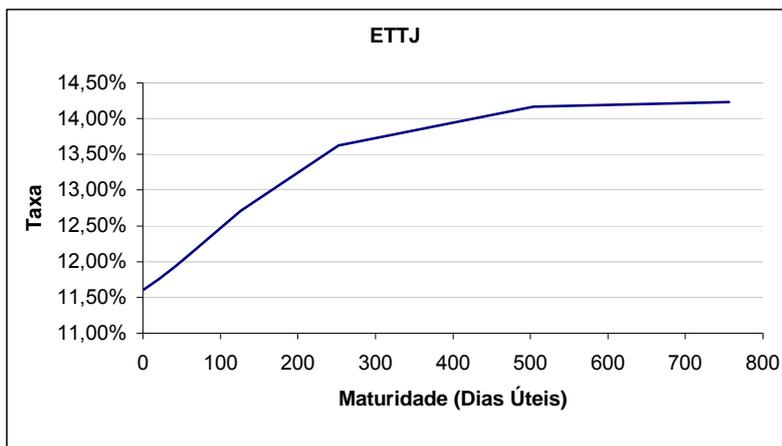
Modelos paramétricos são funções *single-piece* – isto é, funções definidas por todo o domínio da maturidade.

Modelos baseados em *splines*, ao contrário, não especificam uma única forma funcional ao longo de todo o domínio da maturidade: fazem uso de um polinômio *piece-wise*, a função *spline*, que junta segmentos diferentes suavemente em pontos chamados de “nós”.

O gráfico abaixo fornece um exemplo de uma ETTJ completa, aproximada por meio de uma interpolação linear por partes:

Tabela 2/Figura 2: ETTJ brasileira completa do dia 07/05/2008 (fonte: Andima)

Dias Úteis	Taxa Zero Cupom
1	11,61%
21	11,76%
42	11,93%
63	12,13%
126	12,70%
252	13,63%
504	14,16%
756	14,23%



Neste trabalho, usaremos o modelo de N&S para estimar a ETTJ. De acordo com as classificações feitas, o modelo de N&S é um modelo paramétrico “ateórico”³.

De um modo geral, modelos paramétricos da ETTJ são estimados por Mínimos Quadrados Ordinários (MQO). Há duas opções:

- 1) Minimizar a soma do quadrado dos resíduos entre o preço observado e o preço teórico;
- 2) Minimizar a soma do quadrado dos resíduos entre o *yield* observado e o *yield* teórico. Esta foi a opção escolhida para estimar a ETTJ neste trabalho. É importante ressaltar que nossa escolha está em linha com a metodologia de diversos textos do BACEN, incluindo os Trabalhos para Discussão 30, 72, 73, 120 e 158.

³ Como veremos mais a frente, o modelo de N&S tem como motivação a teoria das expectativas – isto é, a teoria das expectativas levou os autores a estudar uma classe específica de funções que estavam alinhadas com ela. A partir desta classe de funções, foi escolhida a forma funcional final do modelo. A forma funcional escolhida, porém, não impõe nenhuma restrição decorrente de dinâmicas econômicas à ETTJ. Portanto, o modelo de N&S é um modelo “ateórico”, no sentido discutido.

Matematicamente, a função objetivo pode ser expressa como:

$$\min \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T (y_n - y_n^*)^2 \quad (4)$$

, onde y_n é o *yield* observado da obrigação com maturidade de n períodos e y_n^* é o *yield* teórico da obrigação com maturidade de n períodos.

3.1.4. TAXA FORWARD

Taxas forward são taxas de juros implicadas pelas atuais taxas zero cupom para períodos no futuro. Para um melhor entendimento deste conceito, faremos uma discussão da *teoria das expectativas* e da *teoria da preferência pela liquidez*, tal como apresentadas por Sachs & Larrain (1993).

A teoria das expectativas parte da observação de que há duas formas de se investir em títulos em um período de n anos:

- (i) O investidor pode comprar no período 0 um título com maturidade de n anos e carregá-lo até o vencimento.
- (ii) O investidor pode comprar no período 0 um título com maturidade de 1 ano e carregá-lo até o vencimento. Quando o título vencer, o dinheiro é reinvestido na compra de um novo título de 1 ano. Este procedimento é repetido até o n -ésimo período.

Na ausência de incerteza, os retornos dessas duas estratégias devem ser iguais para evitar qualquer possibilidade de arbitragem⁴. No caso particular de $n=2$, por exemplo, a única maneira para que tanto um título de 1 ano quanto um título de 2 anos existam é as estratégias (i) e (ii) terem o mesmo retorno. Isto é:

$$(1 + i_{0,2})^2 = (1 + i_{0,1})(1 + f_{1,1}) = (1 + i_{0,1})(1 + i_{1,1}) \quad (5)$$

, onde $i_{0,1}$ e $i_{0,2}$ são as taxas zero cupom no período 0 para os títulos de maturidade de 1 e 2 anos, respectivamente, $f_{1,1}$ é a taxa forward com maturidade de 1 ano no período 1 e $i_{1,1}$ é a taxa zero cupom no período 1 para um título com maturidade de 1 ano. Em um ambiente

⁴ Estamos, no momento, ignorando a existência de qualquer prêmio de liquidez.

onde não há incerteza, $f_{1,1}$ é igual a $i_{1,1}$. Rearrmando a expressão acima e aproximando para zero os termos muito pequenos, obtemos:

$$i_{0,2} = \frac{(i_{0,1} + f_{1,1})}{2} = \frac{(i_{0,1} + i_{1,1})}{2} \quad (6)$$

Assim, podemos ver que, em condições sem incerteza, $i_{0,2}$ é, aproximadamente, uma média aritmética de $i_{0,1}$ e $i_{1,1}$. Na prática, porém, $i_{1,1}$ não é conhecido no período 0. *A teoria das expectativas afirma que $f_{1,1}$ é igual a **expectativa** da taxa zero cupom para um título com maturidade de 1 ano no período 1*. Substituindo na fórmula acima, temos:

$$i_{0,2} = \frac{(i_{0,1} + f_{1,1})}{2} = \frac{(i_{0,1} + i_{1,1}^e)}{2} \quad (7)$$

, onde $i_{1,1}^e$ é a taxa zero cupom esperada no período 1 para um título com maturidade de 1 período.

Generalizando este resultado, temos que, no período 0, a taxa zero cupom para um título com maturidade de n anos é, aproximadamente, a média aritmética das taxas zero cupom esperadas para o curto prazo – ou, de modo equivalente, a média aritmética da taxa de curto prazo que vigora no período 0 e das taxas forward de curto prazo nos períodos futuros. Matematicamente:

$$i_{0,n} = \frac{(i_{0,1} + f_{1,1} + f_{2,1} + \dots + f_{n-1,1})}{n} = \frac{(i_{0,1} + i_{1,1}^e + i_{2,1}^e + \dots + i_{n-1,1}^e)}{n} \quad (8)$$

, onde $f_{n,1}$ é a taxa forward de 1 ano do período n e $i_{n,1}^e$ é a taxa zero cupom esperada de um título com maturidade de 1 ano no período n . De um modo geral, podemos afirmar que a teoria das expectativas é verdadeira quando investidores são neutros ao risco e possuem expectativas racionais.

Convém perguntar, entretanto, o que acontece quando investidores são avessos ao risco. Neste caso, pode haver uma preferência por títulos com maturidades menores, mais líquidos, mesmo que seus *yields* também sejam menores. Assim, a teoria da preferência pela liquidez afirma que investidores exigem um retorno mais alto para carregar títulos de longo prazo, menos líquidos. De modo mais formal:

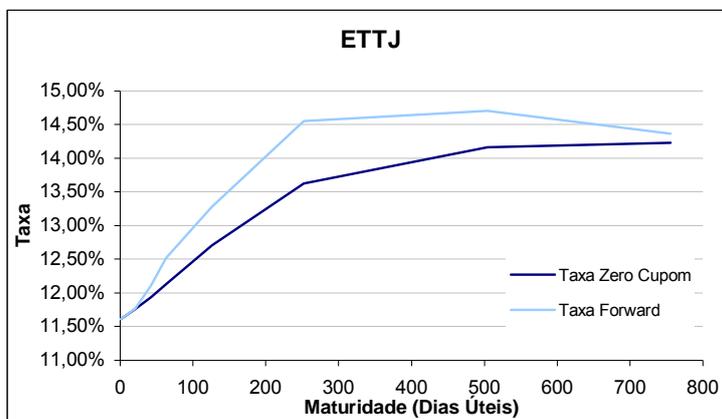
$$i_{0,n} = \frac{(i_{0,1} + f_{1,1} + f_{2,1} + \dots + f_{n-1,1})}{n} = \frac{(i_{0,1} + i_{1,1}^e + i_{2,1}^e + \dots + i_{n-1,1}^e)}{n} + L_n \quad (9)$$

, onde L_n é o prêmio de liquidez. É importante observar que, com a inclusão de L_n , as taxas forward não são mais iguais às taxas zero cupom esperadas para períodos futuros. No entanto, as taxas zero cupom continuam sendo a média aritmética da taxa de curto prazo que vigora no período 0 e das taxas forward de curto prazo nos períodos futuros. Segundo esta teoria, as taxas forward sempre serão *maiores* que as taxas zero cupom esperadas.

Na figura 3, plotamos a ETTJ e suas taxas forward. Vale notar que as taxas forward se situam acima das taxas zero cupom no início, quando a ETTJ é crescente. À medida que a ETTJ se estabiliza, nas maturidades mais longas, a taxa forward converge para a taxa zero cupom. Este resultado é bastante intuitivo observando as equações (8) e (9). Conforme discutido, as taxas zero cupom são, aproximadamente, uma média aritmética das taxas forward. Logo, quando a taxa zero cupom aumenta com a maturidade, a taxa forward deve aumentar mais. Inversamente, quando a taxa zero cupom cai com a maturidade, a taxa forward deve cair mais. Por fim, se a taxa zero cupom se mantém constante em diferentes maturidades, a taxa forward será igual a ela.

Tabela 3/Figura 3: Taxas Forward da ETTJ brasileira completa do dia 07/05/2008 (fonte: Andima)

Dias Úteis	Taxa Zero Cupom	Taxa Forward
1	11,61%	
21	11,76%	11,77%
42	11,93%	12,11%
63	12,13%	12,52%
126	12,70%	13,28%
252	13,63%	14,56%
504	14,16%	14,71%
756	14,23%	14,37%



Há duas razões para termos nos detido mais demoradamente nos conceitos e teorias discutidos nesta subseção. Em primeiro lugar, o conceito de taxa forward frequentemente provoca confusão, mas é um conceito fundamental para uma boa compreensão da ETTJ. A discussão das teorias da expectativa e da preferência pela liquidez ajuda a tornar este conceito mais claro, mostrando diferentes formas de interpretar a relação entre taxas zero

cupom e a taxas forward. Em segundo lugar, o modelo de N&S, que é usado neste trabalho para estimar a ETTJ brasileira, tem como motivação principal a teoria das expectativas.

3.1.5. TAXA FORWARD INSTANTÂNEA

A taxa forward instantânea nada mais é que a taxa forward do período p , com maturidade de n períodos, quando $p \rightarrow n$ (ou, analogamente, quando $p - n \rightarrow 0$). Vimos na subseção anterior que a taxa zero cupom é uma média ponderada das taxas forward. Se conhecemos uma função $f(n)$ que define a taxa forward instantânea para qualquer maturidade n , podemos estender o resultado da subseção anterior para o caso contínuo. Ou seja, ao integrarmos a função $f(n)$ de 0 até n^* , e dividirmos o resultado por n^* , obtemos a taxa zero cupom do período n^* . Sabemos, ainda, que, para títulos zero cupom, a taxa zero cupom e o *yield* são iguais. Matematicamente:

$$i(n^*) = y(n^*) = \frac{\int_0^{n^*} f(n)dn}{n^*} \quad (10)$$

, onde $i(n)$ e $y(n)$ são funções que, para cada maturidade n , fornecem a taxa zero cupom e o *yield*, respectivamente.

3.2. O MODELO DE NELSON & SIEGEL

Para estimar o *yield* teórico (y_n^*) dos títulos zero cupom com diferentes maturidades n , utilizamos o modelo clássico proposto por Nelson & Siegel (1987). A escolha deste modelo foi feita por três motivos principais:

- 1) Sua forma funcional é simples, porém flexível, permitindo que a ETTJ seja plana, positivamente inclinada, negativamente inclinada ou *hump-shaped*.
- 2) De acordo com o *Bank of International Settlement* (BIS Paper Nº25), boa parte dos bancos centrais europeus usa o modelo de N&S ou o modelo de Svensson, que nada mais é que uma versão estendida do modelo de N&S. Ex.: Bélgica, França, Itália, Espanha, dentre outros.

- 3) Compatibilidade com os resultados de Scheinkman & Litterman (1991) e Scheinkman, Knez & Litterman (1994).

Convém, portanto, apresentar em detalhes este modelo. Segundo Nelson & Siegel (1987):

“A class of functions that readily generates the typical yield curve shapes is that associated with solutions to differential or difference equations. The expectations theory of the term structure of interest rates provides heuristic motivation for investigating this class since, if spot rates are generated by a differential equation, then forward rates, being forecasts, will be the solution to the equations” (p. 474).

Depois de alguma experimentação, os autores postulam a seguinte função $f(n)$ para a taxa forward instantânea:

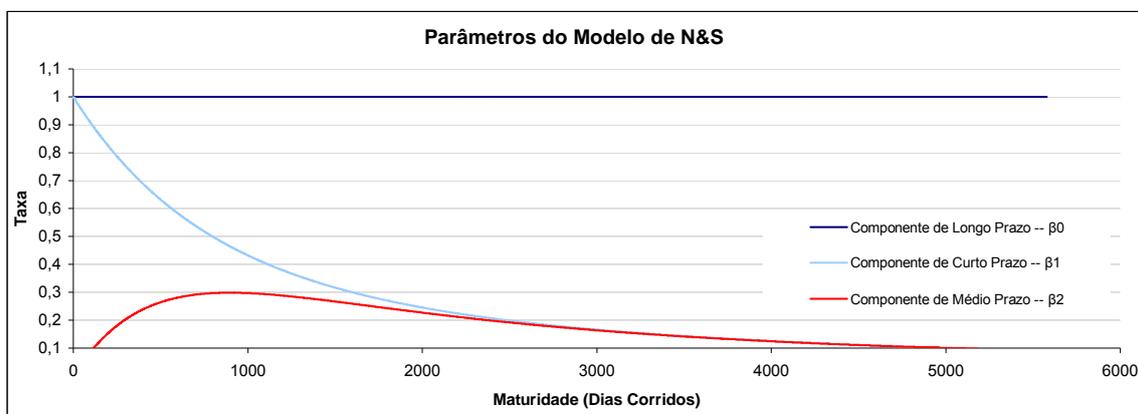
$$f(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \exp(-n/\tau) + \beta_2[(n/\tau) \cdot \exp(-n/\tau)] \quad (11)$$

Integrando a função (11) de 0 até n e dividindo por n , obtemos a função $y(n)$ para o *yield* (ou, de maneira equivalente, a função $i(n)$ para a taxa zero cupom):

$$i(n) = y(n) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \left(\frac{\tau}{n}\right) \cdot [1 - \exp(-n/\tau)] - \beta_2 \cdot \exp(-n/\tau) \quad (12)$$

A função (12) é o cerne do modelo de N&S, descrevendo a ETTJ propriamente dita. β_0 , β_1 , β_2 e τ são os parâmetros a serem estimados. Podemos ver, porém, que este modelo gera um problema de otimização não linear – isto é, o modelo não é linear nos parâmetros. Se arbitrarmos um valor para τ , porém, o modelo passa a ser linear nos parâmetros e podemos aplicar a técnica usual de MQO. Este procedimento é usado neste trabalho.

Nelson & Siegel (1987) interpretam os parâmetros β_0 , β_1 e β_2 como sendo, respectivamente, componentes de longo, curto e médio prazo da ETTJ. A figura 4 mostra o impacto destes parâmetros à medida que a maturidade aumenta.

Figura 4: Impacto dos Parâmetros do Modelo de N&S para Diferentes Maturidades

Como podemos ver, β_0 é o componente de longo prazo, pois, como é uma constante, não varia com a maturidade do título. β_1 é o componente de curto prazo, pois é o parâmetro que decai mais rapidamente para zero à medida que a maturidade aumenta. β_2 é o componente de médio prazo, visto que começa em zero – não sendo, portanto, de curto prazo - e decai para zero à medida que a maturidade aumenta – não sendo, consequentemente, de longo prazo. Scheinkman & Litterman (1991), Scheinkman, Knez & Litterman (1994) e Diebold & Li (2006) sugerem uma interpretação alternativa para estes parâmetros. De acordo com estes autores, β_0 (longo prazo) pode ser entendido como o nível da ETTJ, β_1 (curto prazo) como sua inclinação e β_2 (médio prazo) como sua curvatura.

O parâmetro τ funciona como um termo de decaimento exponencial. Valores pequenos de τ produzem um decaimento lento, ajustando melhor a ETTJ para maturidades mais longas. Valores grandes de τ produzem um decaimento veloz, ajustando melhor a ETTJ para maturidades mais curtas. O τ determina, ainda, em que maturidade se dará o ponto máximo da curvatura.

3.3. AJUSTE PARA A LIQUIDEZ

Em países desenvolvidos, a estimação da ETTJ é razoavelmente fácil e tem alto grau de precisão, pois há um mercado secundário bem desenvolvido e líquido para títulos públicos. No caso de países em desenvolvimento, a situação não é tão simples assim. O mercado secundário não é, geralmente, tão bem estruturado, havendo apenas um conjunto

pequeno de títulos líquidos. Os títulos ilíquidos, por sua vez, são negociados no mercado a *yields* que carregam um “prêmio de iliquidez”. Como uma ETTJ estimada apenas a partir de uma quantidade muito pequena de títulos líquidos pode não ser muito significativa – pois possui poucos vértices –, frequentemente títulos ilíquidos também são utilizados para estimar a ETTJ. Subramanian (2001) frisa, no entanto, que títulos líquidos e ilíquidos são classes heterogêneas de ativos, o que pode acarretar distorções consideráveis na ETTJ estimada.

Conforme Subramanian (2001) ressalta, uma estimação convencional da ETTJ por MQO dá pesos iguais para o quadrado do resíduo de qualquer ativo, independente se ele é líquido ou não. Consequentemente, distorções no apreçamento de obrigações ilíquidas poderiam prejudicar também o ajuste entre o *yield* observado de uma obrigação líquida e seu *yield* teórico. Para minimizar este problema, é preciso lidar de alguma forma com este “prêmio de iliquidez”: pode-se 1) modelá-lo explicitamente ou 2) levá-lo em conta implicitamente. Subramanian (2001) sublinha, porém, que uma estimação paramétrica explícita tem as desvantagens de ser muito dependente de uma especificação correta do modelo e de usar parâmetros adicionais. Deste modo, o autor opta por levar em conta implicitamente o “prêmio de iliquidez”.

Assim, Subramanian (2001) estima a ETTJ de obrigações do governo indiano com uma função objetivo ponderada pela liquidez das obrigações. Para isso, substitui o MQO por Mínimos Quadrados Ponderados (MQP). Matematicamente:

$$\min \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T w_n \times (y_n - y_n^*)^2 \quad (13)$$

, onde w_n é o peso, que varia de acordo com a liquidez do ativo.

A melhor medida para a liquidez das obrigações, argumenta o autor, são dados de *bid-ask*. Caso estes dados não estejam disponíveis, pode-se trabalhar com dados de volume negociado e/ou número de negócios. No caso da ETTJ indiana, Subramanian (2001) usa os dados de volume negociado e número de negócios.

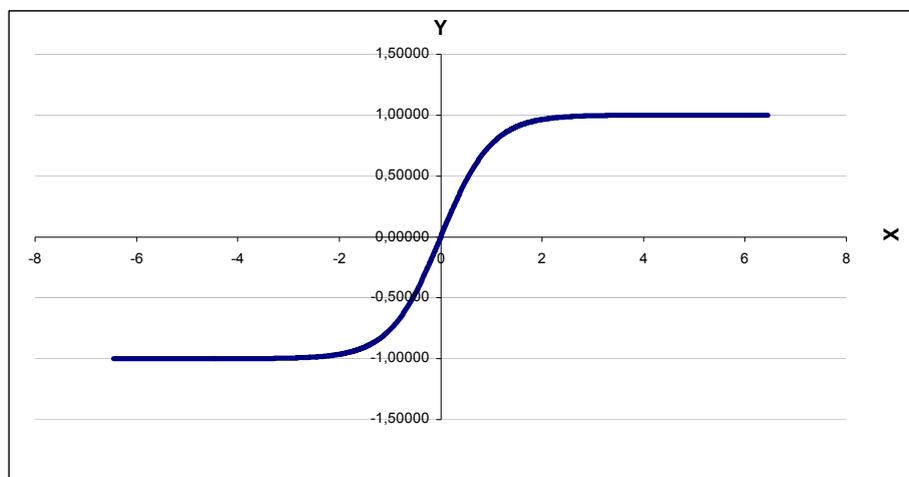
Resta responder, porém, como os pesos devem ser definidos. Subramanian (2001) ressalta duas características básicas da função liquidez:

- 1) Todos os títulos líquidos devem ter pesos semelhantes ao título mais líquido.

- 2) Os pesos devem diminuir a uma taxa crescente à medida que a liquidez dos títulos vai ficando mais limitada.

A partir destas duas características, Subramanian (2001) conclui que a função liquidez deve exibir um comportamento assintótico, de modo que os ativos líquidos se localizem próximo da assíntota e, portanto, tenham valores próximos. Daí, o autor escolhe a função de tangente hiperbólica para modelar a liquidez. A figura 5 mostra esta função.

Figura 5: Tangente Hiperbólica



Pode-se reparar que, tanto para $x > 0$ quanto para $x < 0$, a função converge rapidamente para a assíntota, se adequando bem à primeira característica de uma função liquidez, tal como definida por Subramanian (2001). No entanto, a segunda característica da função liquidez só é mantida para esta função quando $x < 0$, pois apenas neste trecho do domínio a segunda derivada é positiva – e, portanto, os pesos dos ativos ilíquidos decrescem a uma taxa crescente. Assim, Subramanian (2001) define:

$$W_n = [\tanh(-v_n / v_{\max})] + [\tanh(-neg_n / neg_{\max})] \quad (14)$$

, onde v é o volume de negócios e neg é o número de negócios.

Para chegar ao peso de cada ativo na função objetivo, w_n , basta fazer:

$$w_n = \frac{W_n}{\sum_{n=1}^T W_n} \quad (15)$$

É interessante notar que o método de ponderação desenvolvido por Subramanian (2001) possui uma proteção contra *outliers*, pois os pesos são determinados não só pelo volume negociado, mas também pelo número de negócios ocorridos. Pode-se entender melhor a importância deste ponto com um exemplo: imaginemos que, em um determinado dia, um título com maturidade de seis meses teve um volume negociado vinte vezes maior que qualquer outro título negociado neste dia. Este volume foi fruto, porém, de um único negócio. Se a ponderação levasse em conta apenas o volume negociado, os outros títulos pareceriam ser ilíquidos, frente a um volume tão grande. Ao levar em conta também o número de negócios, esta distorção é minimizada.

4. O MERCADO BRASILEIRO DE DI-1 E DE SWAP DI-PRÉ

Conforme frisa Prado (2004), as Letras do Tesouro Nacional (LTNs) seriam os títulos públicos mais apropriados para a construção de uma ETTJ, visto que são obrigações zero cupom e, em situações normais, não têm risco de *default*. No entanto, optamos por construir nossas ETTJs a partir das taxas referenciais de swap DI-PRÉ fornecidas pela Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F). Nossa escolha está longe de ser inusitada. Há vários textos do BACEN em que as taxas referenciais de swap DI-PRÉ da BM&F são utilizadas. Alguns exemplos são os Trabalhos para Discussão 30, 72, 73, 120 e 158.

As taxas referenciais de swap DI-PRÉ também obedecem às duas condições listadas para a construção da ETTJ – a saber, são obtidas através de obrigações zero cupom (os contratos futuros de taxa de juros de 1 dia, DI-1) e, além disso, não têm risco de *default*, visto que a BM&F oferece garantias às partes. Nossa escolha por usar estas taxas no lugar das taxas das LTNs para a construção da ETTJ se fundamenta nas seguintes razões:

- 1) As taxas referenciais de Swap DI-PRÉ possuem *constant maturity* – isto é, todo dia são listadas taxas para 50 vértices *fixos* (ex.: 30, 60, 90, 360 dias corridos). Isto facilita não só a comparação das taxas de diferentes dias, mas também o trabalho de classificação de dados de volume negociado e número de negócios. É importante ressaltar que, a rigor, não há restrição alguma obrigando que um swap tenha maturidade igual à de um vértice fixo. No entanto, o formato dos dados no *site* da BM&F torna razoavelmente fácil categorizar as negociações, lançando-as no vértice fixo mais próximo de sua maturidade real. No caso do mercado de LTNs, a Associação Nacional das Instituições do Mercado Financeiro (ANDIMA) transforma as taxas de LTNs observadas no mercado em taxas de *constant maturity* (há 8 vértices fixos: 1, 21, 42, 63, 126, 252, 504 e 756 dias úteis), mas ainda assim restaria o problema de, para cada dia, classificar as negociações de uma LTN com determinada maturidade (móvel) para o vértice fixo mais próximo.
- 2) Um problema ainda maior se refere ao número reduzido de títulos públicos zero cupom. A um dado momento, há apenas 6 ou 7 LTNs com maturidades distintas sendo negociadas. As maturidades destas LTNs são sempre relativamente curtas,

não ultrapassando nunca 756 dias úteis/3 anos (o último vértice fornecido pela ANDIMA). Para construir uma ETTJ mais longa, seria necessário complementar as informações das LTNs com dados de títulos públicos com maturidades mais longas. No caso, os títulos apropriados seriam as Notas do Tesouro Nacional - Série F (NTN-F), títulos pré-fixados que pagam cupom semestral. Porém, como as NTN-Fs pagam cupom, suas taxas não são imediatamente comparáveis com as taxas das LTNs, devendo ser transformadas em taxas zero cupom por algum método (conforme já mencionamos, um método muito utilizado é o *bootstrap*). Isto implica um custo computacional considerável, que pode ser evitado utilizando-se as taxas referenciais de swap DI-PRÉ.

Como estaremos trabalhando com as taxas referenciais de swap DI-PRÉ, convém discutir como estas taxas são obtidas. Isto implica discutir o funcionamento do mercado brasileiro de DI futuro.

A taxa DI é a taxa média das operações interfinanceiras com maturidade de 1 (um) dia útil. Ela é apurada diariamente pela Central de Custódia e Liquidação Financeira de Títulos (CETIP) e é cotada como uma taxa efetiva, anualizada de acordo com a convenção de 252 dias úteis/ano.

O principal contrato futuro de taxa de juros da BM&F é o contrato de taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia (DI-1). O objeto de negociação deste contrato é a taxa de juros efetiva até seu vencimento. Esta taxa de juros efetiva é definida como a acumulação das taxas diárias de DI no período entre a data de negociação do contrato e seu vencimento.

Como ressalta Ferreira (2004), apesar de ter como objeto de negociação a taxa de juros, o contrato de DI-1 sofre, na prática, uma inversão de posição ao ser registrado. Isto ocorre, pois o ajuste diário é computado em termos de variação nos preços unitários (PU) de um título zero cupom com valor de face de R\$ 100.000,00. Assim, temos a seguinte relação:

$$PU \times (1+i)^{n/252} = 100000 \quad (16)$$

, onde i é a taxa zero cupom negociada e n o número de dias úteis até o vencimento do contrato. A dinâmica do contrato futuro de DI-1 implica, pois, que um comprador do

contrato está comprando taxa de juros e vendendo PU. Inversamente, um vendedor do contrato está vendendo taxa de juros e comprando PU. No vencimento do contrato, o PU converge para o valor de face de R\$ 100.000,00.

Os contratos futuros de DI-1 sempre vencem no primeiro dia útil do mês. Não informam, portanto, taxas de *constant maturity*. Podemos perceber isto com um exemplo: um contrato com vencimento em 21 dias úteis é negociado hoje a uma determinada taxa. Amanhã, a taxa a qual este mesmo contrato for negociado será relativa a 20 dias úteis, não mais 21. As taxas referenciais de Swap DI-PRÉ buscam resolver este problema, encontrando taxas de *constant maturity* para 50 vértices fixos por meio da aplicação da seguinte regra de interpolação exponencial:

$$(1 + i_{n_0+d}) = \left[\left(\frac{(1 + i_{n_1})^{n_1/252}}{(1 + i_{n_0})^{n_0/252}} \right)^{\left(\frac{(n_0+d)-n_0}{n_1-n_0} \right)} \times (1 + i_{n_0})^{n_0/252} \right]^{\frac{252}{(n_0+d)}} \quad (17)$$

Assim, dado um vértice fixo com maturidade em n_0+d , a taxa zero cupom desse vértice, i_{n_0+d} , pode ser encontrada se conhecemos i_{n_0} e i_{n_1} , as taxas zero cupom de contratos futuros de DI-1 que vencem em n_0 , antes do vértice fixo, e em n_1 , depois do vértice fixo, respectivamente.

5. ESTIMAÇÃO DA ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

5.1. FONTE DE DADOS

Para a realização deste trabalho foram coletados do site da BM&F os seguintes dados diários referentes ao período compreendido entre janeiro/2006 e dezembro/2007:

- 1) Taxas referenciais de swap DI-PRÉ.
- 2) Volumes negociados para cada maturidade.
- 3) Número de negócios para cada maturidade.

A base de dados montada pode ser consultada no CD em anexo a este trabalho.

5.2. ESTIMANDO O MODELO DE NELSON & SIEGEL

Este trabalho busca avaliar se o método de estimação da ETTJ com correção para iliquidez desenvolvido por Subramanian (2001) no caso do mercado de obrigações indianas pode ser estendido para o caso brasileiro com sucesso.

Neste sentido, as seguintes etapas foram seguidas:

- 1) Estimação convencional da ETTJ por MQO, ajustando os dados observados ao modelo de N&S.
- 2) Estimação da ETTJ por MQP, ajustando os dados observados ao modelo de N&S e usando como medida de ponderação a liquidez dos ativos.

Vários ajustes foram feitos aos dados coletados para que as estimações da ETTJ brasileira pudessem ser feitas.

Inicialmente, calculamos as taxas referenciais *médias* de Swap DI-PRÉ para todos os meses de 2007. Escolhemos, então, as taxas referenciais dos seguintes meses para servir de amostra: janeiro, abril, julho, outubro e dezembro. Em nossa opinião, estes cinco meses constituem um bom retrato da dinâmica do mercado futuro de juros durante o ano de 2007.

O possível ganho em exatidão que se obteria com uma amostra maior (ex. todos os meses de 2007, dados diários etc.) implicaria custos computacionais significativos.

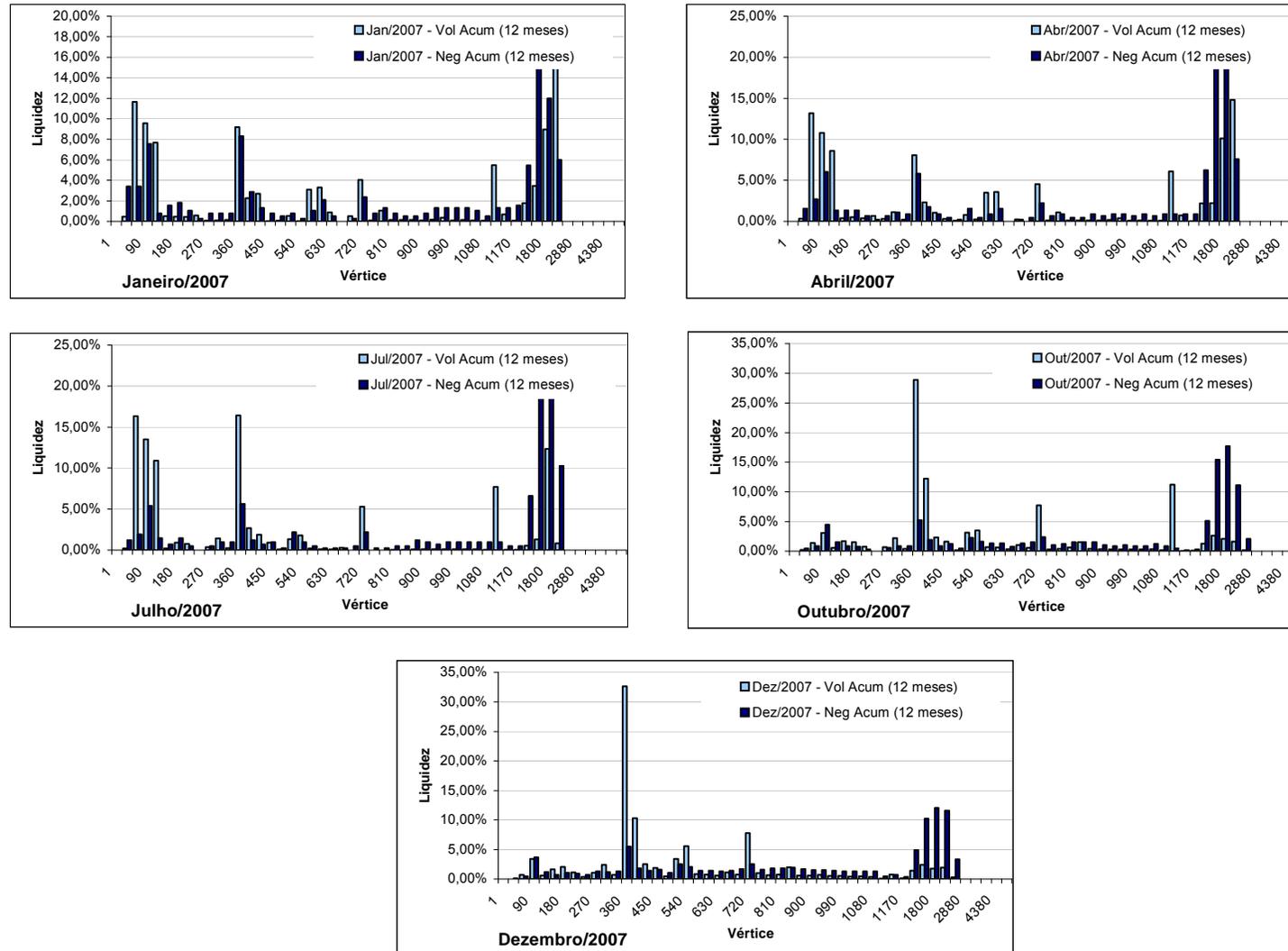
Em seguida, procedemos ao cálculo dos pesos para realizar a ponderação pela liquidez do ativo, tal como explicitado nas equações (14) e (15). Algumas observações são necessárias em relação a este ponto.

Em primeiro lugar, restringiremos nossa atenção apenas às operações de swap DI-PRÉ registradas pela BM&F. Como swaps são operações de mercado de balcão, os swaps registrados pela BM&F não representam, de modo algum, a totalidade do mercado de swaps do Brasil. No entanto, a dificuldade de agregar dados nacionais de swap fez com que concentrássemos nossos esforços nas operações registradas pela BM&F, que são confiáveis e de acesso público. Neste trabalho, quando falarmos em “mercado de swap DI-PRÉ”, estaremos nos referindo especificamente às operações de swap DI-PRÉ registradas na BM&F.

Em segundo lugar, as negociações de swap DI-PRÉ não estão restritas aos vértices, podendo ter a maturidade que as partes desejarem. Encontramos, por exemplo, swaps DI-PRÉ com maturidade de 35 dias corridos – ou seja, entre os vértices fixos de 30 e 60 dias corridos. Seria, no entanto, pouco informativo constatar que um *swap* de 35 dias corridos é mais líquido que um de 36. Para evitar este problema, transferimos todas as negociações que não ocorreram em vértices fixos para o vértice fixo mais próximo.

Em terceiro lugar, de acordo com os dados coletados, em todos os meses do ano de 2007 havia, em média, negociações em apenas 40% dos vértices fixos (no ano de 2006 esse número era ainda menor, por volta de 30%). Para minimizar este problema, ao invés de usarmos o volume negociado e o número de negócios apenas no *mês corrente*, utilizamos como base de cálculo do peso uma *média móvel destas variáveis nos últimos 12 meses*. Assim, os pesos referentes à curva do mês de janeiro de 2007 são construídos a partir do volume e do número de negócios acumulados desde o mês de fevereiro de 2006 (inclusive) até janeiro de 2007 (inclusive). A figura 6 mostra as relações *volume negociado acumulado por vértice* dividido por *volume negociado acumulado total* e *número de negócios acumulado por vértice* dividido por *número de negócios acumulado total* para cada um dos meses da amostra.

Figura 6: Volume Negociado & Número de Negócios - Acumulado 12 meses



O uso da média móvel de 12 meses destas duas variáveis faz com que o número de vértices fixos sem negociação caia drasticamente. De um modo geral, continuam sem negociação apenas o 1º vértice fixo – o que faz sentido, pois ele se refere a 1 (um) dia corrido (trata-se do CDI do dia) – e os 5 últimos vértices fixos, que dizem respeito a maturidades de 7 a 15 anos.

Pode-se perceber que, de julho a outubro há uma quebra no peso do volume do vértice de 60 dias corridos. Esta quebra é provocada por *outliers*, em especial uma negociação ocorrida em agosto de 2006 com volume total de R\$ 1 bilhão. É interessante relembrar, entretanto, uma observação feita na subseção 3.3: como a ponderação sugerida por Subramanian (2001) não leva em conta apenas o volume negociado por vértice, mas também o número de negociações, ela funciona como uma proteção contra *outliers*. Neste sentido, se a distorção provocada pelos *outliers* não chega a ser completamente eliminada, ela certamente é minimizada.

Uma vez feitos estes ajustes aos dados de volume negociado e número de negócios, procedemos ao cálculo dos pesos. A tabela 4 resume os valores encontrados para cada observação:

Tabela 4: Pesos

Vértices Fixos - DCs	Tangente Hiperbólica -- Volume + Negócios				
	jan-07	abr-07	jul-07	out-07	dez-07
1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
30	1,93%	0,95%	0,73%	0,35%	0,06%
60	7,52%	7,91%	9,12%	1,15%	0,59%
90	8,56%	8,40%	9,46%	3,80%	3,56%
120	4,23%	4,97%	6,19%	1,05%	0,86%
150	1,04%	0,85%	0,48%	1,31%	1,18%
180	1,15%	0,92%	1,20%	1,13%	1,57%
210	0,75%	0,53%	0,62%	0,55%	1,02%
240	0,43%	0,44%	0,00%	0,00%	0,52%
270	0,42%	0,49%	0,43%	0,64%	1,18%
300	0,44%	1,13%	1,21%	1,56%	1,78%
330	0,47%	0,55%	0,62%	0,67%	1,00%
360	8,76%	6,96%	11,01%	16,78%	18,65%
390	2,57%	2,05%	1,96%	7,11%	6,10%
420	2,01%	0,98%	1,31%	1,62%	1,96%
450	0,40%	0,38%	0,97%	1,44%	1,76%
480	0,30%	0,15%	0,17%	0,33%	0,76%
510	0,66%	1,18%	1,79%	2,72%	2,97%
540	0,15%	0,34%	1,40%	2,57%	3,82%
570	2,08%	2,20%	0,36%	1,04%	1,10%
600	2,70%	2,59%	0,20%	1,01%	1,08%
630	0,70%	0,00%	0,17%	0,56%	0,93%
660	0,00%	0,23%	0,28%	1,21%	1,26%
690	0,38%	0,23%	0,25%	1,06%	1,24%
720	3,20%	3,41%	3,76%	5,11%	5,18%
750	0,44%	0,39%	0,13%	0,69%	1,31%
780	1,18%	0,99%	0,13%	0,79%	1,25%
810	0,46%	0,29%	0,28%	1,07%	1,32%
840	0,32%	0,29%	0,28%	1,51%	1,98%
870	0,32%	0,52%	0,66%	0,95%	1,17%
900	0,45%	0,40%	0,56%	0,71%	1,06%
930	0,74%	0,53%	0,44%	0,61%	1,10%
960	0,84%	0,65%	0,56%	0,67%	0,97%
990	0,70%	0,38%	0,55%	0,60%	0,89%
1020	0,71%	0,51%	0,55%	0,59%	0,84%
1050	0,57%	0,38%	0,55%	0,78%	0,87%
1080	0,29%	0,49%	0,52%	0,55%	0,83%
1110	3,40%	3,52%	4,36%	5,85%	0,27%
1140	0,98%	0,81%	0,27%	0,10%	0,72%
1170	0,82%	0,48%	0,27%	0,20%	0,23%
1200	3,64%	4,23%	3,60%	3,20%	3,20%
1440	10,53%	11,04%	10,02%	9,04%	6,33%
1800	10,46%	15,10%	17,06%	9,87%	6,93%
2160	12,31%	11,18%	5,57%	6,37%	6,79%
2520	0,00%	0,00%	0,00%	1,13%	1,82%
2880	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
3240	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
3600	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
4380	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
5580	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Analisando a tabela 4 e a figura 6 em conjunto, nota-se que a liquidez do swap DI-PRÉ reflete nas três primeiras observações uma distribuição trimodal e nas duas últimas uma distribuição bimodal. A distribuição trimodal das três primeiras curvas se deve aos já referidos *outliers*. Em todas as observações, a liquidez se concentra em dois focos: na ponta curta da curva, dos vértices fixos de 60 a 390 dias corridos, e na ponta longa da curva, dos

vértices fixos de 1200 a 2160 dias corridos. Em média, 70% da liquidez do swap DI-PRÉ está nestas maturidades – isto é, em apenas 16 dos 50 vértices fixos.

Conforme se antecipou na subseção 3.2, um problema fundamental ao se utilizar o modelo de N&S diz respeito a como lidar com o τ . Um τ mal arbitrado pode facilmente distorcer os resultados obtidos. Para resolver este problema, foi montado um *grid* com o objetivo de encontrar o τ que produz o melhor ajuste aos dados observados – ou seja, o τ que maximiza o R^2 . Utilizamos como pontos do *grid* todos os 50 vértices fixos da curva referencial de swap DI-PRÉ. Ignorando o 1º vértice fixo, que é igual a 1 (um) dia corrido (o CDI do dia), do 2º vértice fixo (30 dias corridos) ao 41º (1200 dias corridos), a distância entre cada vértice é de 30 dias. Do 42º vértice fixo ao 50º esta distância vai aumentando gradativamente de 240 para 1200 dias corridos (o último vértice fixo se situa em 5580 dias corridos). Assim, para acharmos o τ ótimo, foram rodadas 100 regressões para cada observação na amostra (50 por MQO e 50 por MQP), totalizando 500 regressões⁵. Na próxima página, a tabela 5 resume os resultados encontrados.

⁵ Para ajudar nesta tarefa, desenvolvemos uma rotina em Excel, que está no CD em anexo, no arquivo Nelson & Siegel.xls.

Tabela 5: Grid - R² para diferentes τ

GRID	MQO - jan/07	MQO - abr/07	MQO - jul/07	MQO - out/07	MQO - dez/07	MEDIA	MQP - jan/07	MQP - abr/07	MQP - jul/07	MQP - out/07	MQP - dez/07	MEDIA
1	86,40%	68,57%	86,15%	49,28%	52,10%	68,50%	94,85%	92,31%	96,17%	89,81%	96,23%	93,87%
30	92,26%	92,58%	96,39%	82,26%	81,95%	89,09%	95,76%	97,11%	97,40%	85,31%	88,36%	92,79%
60	91,79%	99,08%	95,62%	96,47%	95,39%	95,67%	95,88%	99,62%	97,07%	97,06%	97,46%	97,42%
90	93,79%	99,90%	96,40%	99,01%	98,88%	97,59%	97,50%	99,98%	98,15%	98,28%	99,18%	98,62%
120	96,29%	99,82%	97,69%	98,44%	99,29%	98,31%	98,76%	99,96%	99,01%	97,70%	99,11%	98,91%
150	98,25%	99,71%	98,43%	97,37%	98,84%	98,52%	99,49%	99,93%	99,43%	97,13%	98,74%	98,94%
180	99,38%	99,71%	98,33%	96,52%	98,32%	98,45%	99,83%	99,93%	99,51%	96,78%	98,41%	98,89%
210	99,69%	99,77%	97,53%	96,01%	97,96%	98,19%	99,90%	99,95%	99,34%	99,34%	98,21%	98,81%
240	99,34%	99,85%	96,23%	95,77%	97,77%	97,79%	99,76%	99,97%	99,00%	96,63%	98,13%	98,70%
270	98,49%	99,92%	94,62%	95,72%	97,74%	97,30%	99,46%	99,98%	98,54%	96,74%	98,14%	98,57%
300	97,31%	99,97%	92,85%	95,81%	97,80%	96,75%	99,04%	99,98%	97,98%	96,90%	98,21%	98,42%
330	95,91%	99,97%	91,02%	95,93%	97,92%	96,15%	98,53%	99,98%	97,36%	97,08%	98,31%	98,25%
360	94,39%	99,93%	89,21%	96,07%	98,07%	95,53%	97,95%	99,96%	96,70%	97,25%	98,42%	98,06%
390	92,81%	99,85%	87,45%	96,22%	98,22%	94,91%	97,32%	99,93%	96,02%	97,41%	98,53%	97,84%
420	91,22%	99,73%	85,76%	96,35%	98,37%	94,29%	96,68%	99,88%	95,34%	97,56%	98,63%	97,62%
450	89,65%	99,59%	84,16%	96,45%	98,50%	93,67%	96,02%	99,83%	94,65%	97,68%	98,72%	97,38%
480	88,10%	99,43%	82,65%	96,53%	98,61%	93,06%	95,36%	99,78%	93,98%	97,77%	98,80%	97,14%
510	86,60%	99,24%	81,22%	96,59%	98,71%	92,47%	94,71%	99,71%	93,32%	97,85%	98,86%	96,89%
540	85,15%	99,04%	79,87%	96,61%	98,77%	91,89%	94,07%	99,65%	92,68%	97,91%	98,92%	96,64%
570	83,76%	98,82%	78,61%	96,61%	98,82%	91,32%	93,45%	99,58%	92,07%	97,94%	98,95%	96,32%
600	82,41%	98,59%	77,41%	96,59%	98,85%	90,77%	92,85%	99,51%	91,48%	97,97%	98,98%	96,16%
630	81,11%	98,35%	76,28%	96,55%	98,86%	90,23%	92,27%	99,43%	90,91%	97,98%	99,00%	95,92%
660	79,87%	98,11%	75,21%	96,50%	98,85%	89,71%	91,71%	99,36%	90,37%	97,98%	99,01%	95,68%
690	78,67%	97,86%	74,20%	96,43%	98,82%	89,20%	91,17%	99,28%	89,85%	97,97%	99,01%	95,46%
720	77,51%	97,60%	73,24%	96,34%	98,79%	88,70%	90,65%	99,21%	89,36%	97,95%	99,01%	95,23%
750	76,40%	97,34%	72,33%	96,24%	98,73%	88,21%	90,17%	99,13%	88,89%	97,92%	99,00%	95,02%
780	75,33%	97,08%	71,47%	96,13%	98,67%	87,74%	89,72%	99,06%	88,45%	97,91%	98,99%	94,82%
810	74,31%	96,81%	70,64%	96,01%	98,60%	87,27%	89,28%	98,99%	88,03%	97,88%	98,97%	94,63%
840	73,32%	96,54%	69,85%	95,88%	98,51%	86,82%	88,86%	98,92%	87,63%	97,84%	98,95%	94,44%
870	72,37%	96,28%	69,10%	95,74%	98,42%	86,38%	88,47%	98,85%	87,25%	97,80%	98,92%	94,26%
900	71,46%	96,01%	68,39%	95,59%	98,32%	85,95%	88,10%	98,78%	86,89%	97,76%	98,90%	94,09%
930	70,55%	95,74%	67,70%	95,44%	98,21%	85,53%	87,77%	98,72%	86,56%	97,72%	98,87%	93,93%
960	69,67%	95,48%	67,05%	95,29%	98,10%	85,12%	87,44%	98,65%	86,24%	97,69%	98,84%	93,77%
990	68,84%	95,21%	66,41%	95,13%	97,98%	84,71%	87,12%	98,59%	85,96%	97,65%	98,81%	93,63%
1020	68,03%	94,95%	65,79%	94,98%	97,86%	84,32%	86,82%	98,53%	85,65%	97,61%	98,78%	93,48%
1050	67,25%	94,68%	65,21%	94,82%	97,73%	83,94%	86,54%	98,47%	85,39%	97,56%	98,75%	93,34%
1080	66,50%	94,42%	64,64%	94,66%	97,60%	83,57%	86,28%	98,42%	85,12%	97,52%	98,72%	93,21%
1110	65,77%	94,16%	64,10%	94,50%	97,47%	83,20%	86,04%	98,36%	84,89%	97,48%	98,69%	93,09%
1140	65,07%	93,91%	63,58%	94,33%	97,34%	82,84%	85,80%	98,31%	84,70%	97,45%	98,65%	92,98%
1170	64,39%	93,65%	63,07%	94,17%	97,20%	82,50%	85,59%	98,26%	84,49%	97,41%	98,62%	92,87%
1200	63,72%	93,40%	62,59%	94,00%	97,06%	82,16%	85,37%	98,21%	84,29%	97,37%	98,59%	92,75%
1440	59,12%	91,51%	59,25%	92,70%	95,92%	79,70%	84,11%	97,86%	83,09%	97,09%	98,34%	92,10%
1800	53,93%	89,07%	55,54%	90,90%	94,28%	76,74%	83,09%	97,48%	82,15%	96,79%	98,02%	91,51%
2160	50,14%	87,07%	52,89%	89,38%	92,83%	74,46%	82,75%	97,21%	81,75%	96,58%	97,77%	91,21%
2520	47,28%	85,45%	50,85%	88,11%	91,59%	72,66%	82,47%	97,00%	81,63%	96,39%	97,57%	91,01%
2880	45,06%	84,10%	49,28%	87,05%	90,54%	71,21%	82,24%	96,83%	81,59%	96,13%	97,43%	90,84%
3240	43,29%	82,98%	48,02%	86,16%	89,65%	70,02%	82,25%	96,67%	81,58%	96,06%	97,33%	90,78%
3600	41,84%	82,03%	47,00%	85,40%	88,87%	69,03%	82,25%	96,67%	81,58%	95,66%	97,16%	90,67%
4380	39,46%	80,41%	45,29%	84,07%	87,56%	67,36%	82,12%	96,32%	81,58%	95,66%	97,16%	90,67%
5580	36,97%	78,65%	43,50%	82,49%	86,14%	65,55%	81,25%	95,87%	81,25%	95,66%	97,20%	90,67%
MÁXIMO	99,69%	99,97%	98,43%	99,01%	99,29%	98,52%	99,90%	99,98%	99,51%	98,28%	99,18%	98,94%

Como podemos ver, a ponderação pela liquidez altera o τ ótimo em três das cinco observações, apesar da diferença em todos os casos ser de apenas um vértice (para mais ou para menos). Deve-se notar, porém, que o τ ótimo médio é igual tanto na estimação por MQO, quanto por MQP, situando-se no vértice de 150 dias corridos. Em nossa estimação definitiva das ETTJs, para uma maior consistência e comparabilidade dos resultados, ao invés de usarmos o τ ótimo de cada observação, utilizamos o τ ótimo médio encontrado.

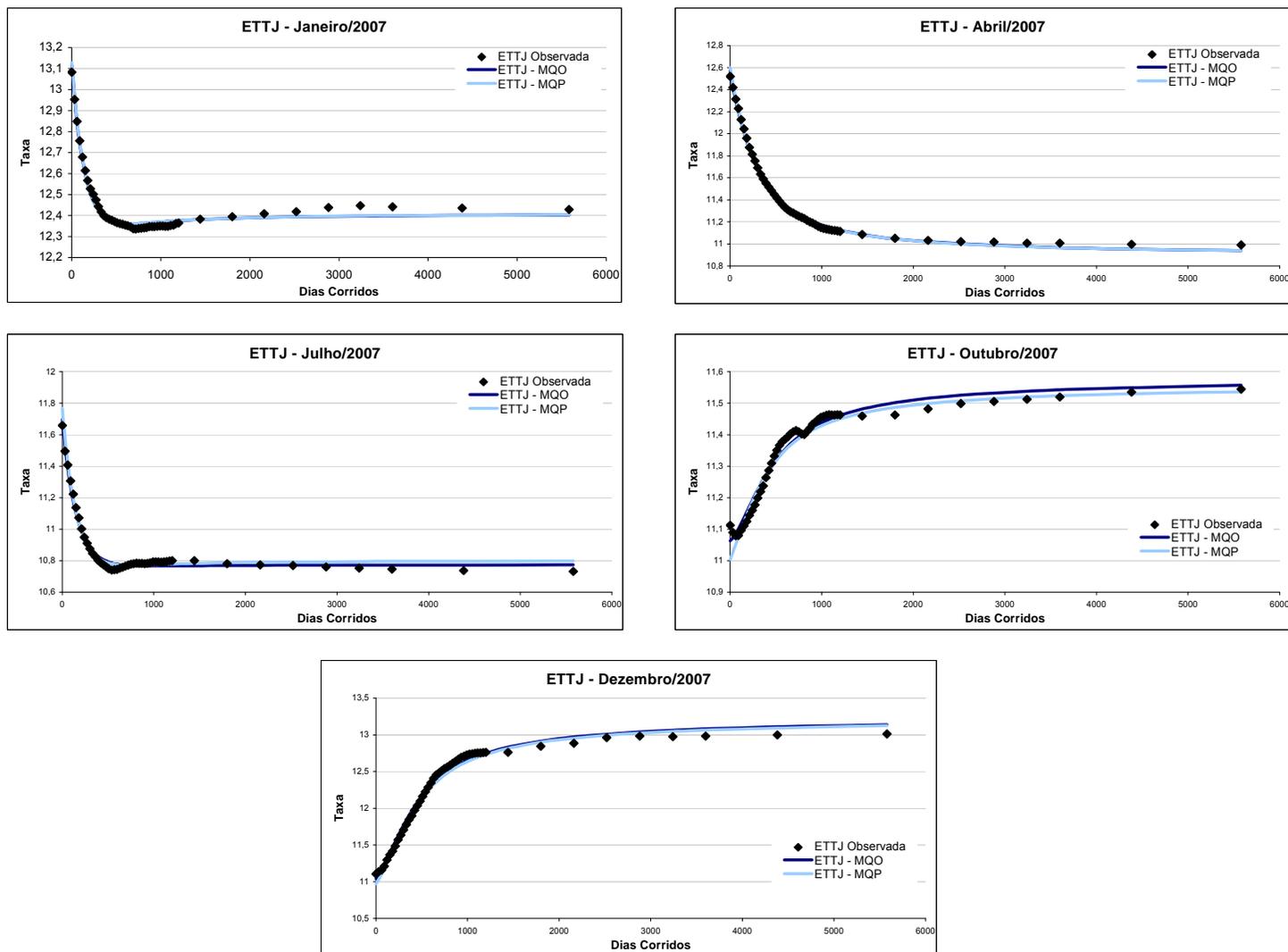
Na página 35, a figura 7 mostra as ETTJs estimadas. Alguns pontos chamam atenção:

- 1) As curvas estimadas por MQO e por MQP de janeiro/2007 e abril/2007 estão praticamente superpostas, não havendo nenhuma melhora significativa no caso do ajuste por MQP. No entanto, as ETTJs estimadas por MQP de julho/2007, dezembro/2007 e, especialmente, outubro/2007 apresentam diferenças em relação às estimadas por MQO. Na curva de julho/2007, o MQP ajustou melhor do que o

MQO vértices com maturidade entre 810 e 1200 dias corridos, mas tornou o ajuste dos vértices mais longos um pouco pior. Já nas curvas de outubro/2007 e dezembro/2007, há um ganho importante de ajuste nas maturidades maiores do que 1440 dias corridos.

- 2) As curvas estimadas por MQP aproximam os vértices de 1 e 30 dias corridos bem pior do que as estimadas por MQO, especialmente nos meses de outubro/2007 e dezembro/2007. Isto já era esperado, visto que a ponderação pela liquidez atribui peso zero ao primeiro vértice.
- 3) Fica claro que o modelo de N&S não é capaz de capturar movimentos abruptos da curva, como os que ocorrem na ETTJ de julho/2007, entre os vértices de 450 e 750 dias corridos, e na ETTJ de outubro/2007, entre os vértices de 720 e 840 dias corridos.

Figura 7: ETTJs Estimadas – $\tau = 150$



A tabela 6 compara, para cada observação, os parâmetros ótimos obtidos por MQO e por MQP:

Tabela 6: Parâmetros das ETTJs Estimadas

	jan/07		abr/07		jul/07		out/07		dez/07	
	MQO	MQP								
β_0	12,41	12,41	10,89	10,89	10,77	10,80	11,58	11,56	13,24	13,23
β_1	0,71	0,72	1,69	1,72	0,93	0,97	-0,52	-0,56	-2,20	-2,26
β_2	-0,99	-1,01	0,21	0,18	-0,99	-1,17	-0,45	-0,32	-1,75	-1,72
τ	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150

Nas curvas de janeiro/2007 e abril/2007, há poucas diferenças nos parâmetros obtidos por MQO e por MQP. O nível e a inclinação das curvas são iguais. Há uma pequena diferença apenas na curvatura das curvas. Nas curvas de julho/2007 e outubro/2007, surgem diferenças nos três parâmetros. Nestas observações, porém, a maior diferença aparece na curvatura das ETTJs. A curva de dezembro/2007 é a única onde a inclinação é o parâmetro que mais varia. No geral, porém, as diferenças entre os parâmetros estimados por MQO e por MQP *não* são estatisticamente significantes a um nível de 5%.

As tabelas 7 e 8 comparam, para cada observação, os erros absolutos médios em *pontos base*⁶ obtidos por MQO e por MQP, categorizando os vértices fixos em grupos, de acordo com o grau de liquidez:

Tabela 7: Erro Absoluto Médio (EAM) - Vértices Líquidos

Vértices Líquidos	Liquidez Média	jan/07		abr/07		jul/07		out/07		dez/07		EAM (MQO)	EAM (MQP)	EAM (MQP) - EAM (MQO)
		MQO	MQP											
60	5,26%	0,33	0,45	0,17	1,70	1,96	1,59	0,59	2,80	0,13	5,72	0,64	2,45	1,82
90	6,76%	1,12	0,49	3,01	1,48	3,46	1,14	2,07	0,43	2,05	2,93	2,34	1,29	-1,05
120	3,46%	1,50	0,99	2,87	1,62	4,53	3,15	2,16	0,34	1,04	3,44	2,42	1,91	-0,51
150	0,97%	1,58	1,16	3,44	2,42	3,65	2,98	2,51	1,21	2,10	1,95	2,65	1,94	-0,71
180	1,19%	2,06	1,72	2,92	2,08	3,42	3,27	2,90	2,00	5,25	1,55	3,31	2,13	-1,18
300	1,22%	1,91	1,76	0,96	0,61	0,66	0,12	2,56	2,41	6,69	3,94	2,56	1,77	-0,79
360	12,43%	0,44	0,33	0,19	0,03	1,79	0,96	1,95	1,89	6,07	3,60	2,09	1,36	-0,73
390	3,06%	0,56	0,47	0,29	0,14	2,44	1,63	0,78	0,72	6,84	4,49	2,18	1,49	-0,70
420	1,58%	0,62	0,55	0,59	0,47	2,84	2,08	0,16	0,24	5,04	2,78	1,85	1,22	-0,63
450	0,99%	0,59	0,52	0,62	0,54	3,22	2,52	1,11	1,21	4,23	2,06	1,95	1,37	-0,58
510	1,86%	0,20	0,15	0,32	0,34	4,18	3,65	2,80	2,98	1,65	0,39	1,83	1,50	-0,33
540	1,66%	0,07	0,12	0,75	0,75	4,52	4,08	3,34	3,57	0,20	2,19	1,77	2,14	0,37
570	1,36%	0,21	0,26	1,35	1,33	3,83	3,48	3,41	3,69	1,77	3,71	2,11	2,50	0,38
600	1,51%	0,57	0,62	1,88	1,85	3,26	3,01	3,20	3,53	4,03	5,93	2,59	2,99	0,40
720	4,13%	2,57	2,61	1,28	1,21	0,19	0,06	2,69	3,24	7,35	9,13	2,81	3,25	0,44
1110	3,48%	2,10	2,16	1,99	1,87	2,48	1,46	1,00	2,09	4,31	5,90	2,38	2,70	0,32
1200	3,57%	1,21	1,27	1,08	0,95	3,37	2,20	0,12	1,29	1,16	2,73	1,39	1,69	0,30
1440	9,39%	0,15	0,08	0,06	0,08	3,23	1,76	2,31	0,95	6,98	5,46	2,54	1,67	-0,88
1800	11,88%	0,76	0,69	0,49	0,63	1,07	0,70	3,95	2,41	7,21	5,73	2,70	2,03	-0,66
2160	8,44%	1,76	1,68	1,06	1,22	0,28	1,69	3,34	1,68	8,32	6,88	2,95	2,63	-0,32
MEDIA		1,02	0,90	1,27	1,07	2,72	2,08	2,15	1,93	4,12	4,03	2,25	2,00	-0,25

⁶ Um ponto base é um centésimo de um ponto percentual.

Tabela 8: Erro Absoluto Médio (EAM) - Vértices Ilíquidos

Vértices Ilíquidos	Liquidez Média	jan/07		abr/07		jul/07		out/07		dez/07		EAM (MQO)	EAM (MQP)	EAM (MQP) - EAM (MQO)
		MQO	MQP	MQO	MQP	MQO	MQP	MQO	MQP	MQO	MQP			
1	0.00%	3,40	4,59	5,08	7,84	3,86	10,96	4,96	10,87	6,49	13,65	4,76	9,58	4,82
30	0.80%	1,65	2,62	1,67	3,94	3,37	8,50	1,70	6,22	4,59	10,92	2,60	6,44	3,84
210	0.69%	2,29	2,02	1,89	1,22	1,57	1,81	2,82	2,21	6,40	3,00	2,99	2,05	-0,94
240	0.28%	2,96	2,73	1,96	1,41	0,41	0,91	3,08	2,68	5,53	2,38	2,79	2,02	-0,76
270	0.63%	2,97	2,79	1,97	1,54	0,09	0,59	3,10	2,85	6,22	3,29	2,87	2,21	-0,66
330	0.66%	0,90	0,78	0,13	0,14	1,39	0,57	2,24	2,15	5,85	3,26	2,10	1,38	-0,73
480	0.34%	0,44	0,38	0,10	0,05	3,80	3,18	2,13	2,27	3,35	1,24	1,96	1,42	-0,54
630	0.47%	0,89	0,93	2,04	1,99	2,32	2,17	3,11	3,50	6,33	8,19	2,94	3,36	0,42
660	0.60%	1,46	1,50	1,97	1,91	1,46	1,40	3,20	3,64	7,75	9,59	3,17	3,61	0,44
690	0.63%	2,26	2,30	1,60	1,54	0,63	0,66	3,05	3,55	7,61	9,42	3,03	3,49	0,46
750	0.59%	2,32	2,36	1,05	0,97	0,72	0,50	1,58	2,19	7,07	8,83	2,55	2,97	0,42
780	0.87%	2,25	2,30	0,82	0,73	1,22	0,92	0,26	0,92	6,68	8,41	2,25	2,66	0,41
810	0.68%	2,20	2,24	0,73	0,63	1,59	1,21	0,56	0,14	6,56	8,28	2,33	2,50	0,17
840	0.88%	2,16	2,20	1,00	0,91	1,62	1,16	0,20	0,55	6,80	8,50	2,36	2,66	0,31
870	0.72%	1,88	1,93	1,30	1,19	1,60	1,06	0,33	1,12	7,25	8,93	2,47	2,85	0,38
900	0.63%	1,98	2,03	1,39	1,28	1,34	0,74	1,00	1,84	7,90	9,57	2,72	3,09	0,37
930	0.68%	1,99	2,04	1,86	1,75	1,64	0,96	1,19	2,07	8,10	9,75	2,95	3,31	0,36
960	0.74%	2,05	2,10	2,33	2,21	1,93	1,19	1,58	2,49	8,02	9,66	3,18	3,53	0,35
990	0.62%	1,89	1,94	2,58	2,47	2,50	1,70	1,80	2,76	7,81	9,44	3,32	3,66	0,34
1020	0.64%	2,10	2,15	2,66	2,54	2,46	1,60	1,68	2,67	7,46	9,08	3,27	3,61	0,34
1050	0.63%	2,29	2,34	2,40	2,28	2,50	1,58	1,71	2,74	6,31	7,92	3,04	3,37	0,33
1080	0.53%	2,34	2,39	2,24	2,12	2,41	1,43	1,53	2,58	5,37	6,97	2,78	3,10	0,32
1140	0.58%	1,94	2,00	1,63	1,50	2,76	1,69	0,74	1,86	3,16	4,75	2,05	2,36	0,31
1170	0.40%	1,42	1,48	1,20	1,07	3,09	1,98	0,49	1,63	2,12	3,70	1,66	1,97	0,31
2520	0.59%	2,48	2,40	1,89	2,05	0,21	2,32	2,63	0,89	4,52	3,10	2,35	2,15	-0,19
2880	0.00%	4,22	4,14	3,20	3,36	1,06	3,28	2,66	0,85	5,36	3,95	3,30	3,12	-0,18
3240	0.00%	4,97	4,89	3,10	3,26	1,95	4,26	2,58	0,72	8,48	7,09	4,21	4,04	-0,17
3600	0.00%	4,32	4,23	4,02	4,19	2,50	4,87	2,22	0,31	9,59	8,21	4,53	4,36	-0,17
4380	0.00%	3,54	3,45	4,33	4,50	3,49	5,97	1,46	0,51	10,91	9,55	4,75	4,80	0,05
5580	0.00%	2,53	2,43	5,07	5,25	4,15	6,74	1,17	0,86	12,66	11,31	5,12	5,32	0,20
MEDIA		2,34	2,39	2,11	2,20	1,99	2,53	1,89	2,32	6,74	7,40	3,01	3,37	0,35

Na tabela 7, separamos os 20 vértices mais líquidos, que representam, em média, 85% da liquidez do mercado de swap DI-PRÉ. De um modo geral, nestes vértices, o erro absoluto médio (EAM) das estimções por MQP é menor do que o obtido por MQO. A última coluna da tabela 7 mostra que o uso de MQP reduziu o EAM nos vértices líquidos em aproximadamente 0,25 pontos base. Na tabela 8, estão os 30 vértices mais *ilíquidos*, que representam apenas 15% da liquidez do mercado de swap DI-PRÉ. Nestes vértices, temos o quadro oposto ao encontrado na tabela 7. Salvo algumas exceções, a estimção por MQP *piorou* o ajuste da curva nos vértices. Este resultado era de se esperar, pois a ponderação atribuiu um peso insignificante aos vértices pouco líquidos. A última coluna da tabela 8 mostra que o uso de MQP aumentou o EAM nos vértices ilíquidos em aproximadamente 0,35 pontos base.

Nas tabelas 7 e 8, marcamos em azul os vértices que tiveram uma melhora no ajuste maior ou igual a 1 (um) ponto base nas estimções por MQP e em amarelo os que tiveram uma piora maior ou igual a 1 (um) ponto base. Fica clara a formação de “blocos” de ganho e de perda da qualidade do ajuste. É interessante notar, ainda, que vértices líquidos podem acabar melhorando o ajuste de vértices pouco negociados “próximos”. Isto é especialmente verdade no caso dos vértices de 7 a 15 anos, que tiveram uma melhora do ajuste na estimção por MQP em duas das cinco observções, apesar do peso atribuído a estes vértices ser zero. Isto ocorreu, porque os vértices de 4 a 6 anos são bastante negociados –

em particular, o vértice de 2160 dias corridos é o 4º vértice mais líquido –, o que acaba balizando o ajuste e impedindo EAM maiores.

Ainda em relação às tabelas 7 e 8, mais três pontos devem ser frisados. Em primeiro lugar, há uma queda significativa na qualidade do ajuste do vértice de 60 dias corridos nas curvas de outubro/2007 e dezembro/2007. Como ressaltamos anteriormente, este é o vértice em que há um *outlier*, daí o aumento significativo do EAM nas duas últimas observações, quando a distorção do *outlier* não está mais presente e o vértice deixa de ter liquidez. Em segundo lugar, é interessante observar que o vértice com o pior ajuste nas estimações por MQP foi justamente o 1º vértice, referente a um dia corrido. Como o peso atribuído a ele foi zero em todas as estimações por MQP, era como se este vértice efetivamente não existisse. Em terceiro lugar, a curva de dezembro/2007 possui diferenças de mais de um ponto base (para mais ou para menos) em praticamente todos os vértices. Este fato se deve a uma queda abrupta da taxa no vértice de 1200 dias corridos, que não é bem ajustada pelo modelo de N&S.

Os resultados obtidos estão em linha com o ajuste para iliquidez proposto por Subramanian (2001): ocorreu uma melhora no ajuste dos vértices líquidos e uma piora no ajuste dos vértices ilíquidos. No entanto, a magnitude da correção foi baixa. Isto nos leva de volta à tabela 6: a diferença entre os parâmetros estimados por MQO e por MQP não é estatisticamente significativa ao nível de 5%. Portanto, no caso do mercado de swap DI-PRÉ, o ajuste para iliquidez proposto por Subramanian (2001) não se mostra indispensável.

Uma provável causa deste resultado é o próprio modo de construção das taxas referenciais de swap DI-PRÉ. Conforme vimos na seção 4, estas taxas são obtidas a partir da interpolação exponencial das taxas do mercado futuro de DI-1. Neste sentido, já ocorre uma aproximação das taxas efetivamente observadas a uma forma funcional. Assim, quando ajustamos as taxas referenciais de swap DI-PRÉ ao modelo de N&S, estamos realizando uma *segunda* aproximação – o que tende a gerar resultados mais “tímidos”, dada a suavização anterior. É possível que o ajuste proposto por Subramanian (2001) produza resultados mais significativos caso seja aplicado *diretamente* ao mercado de DI-1.

6. CONCLUSÃO

Esta monografia buscou testar se o método desenvolvido por Subramanian (2001) de ajuste da ETTJ pela liquidez dos ativos era capaz de gerar bons resultados para o caso brasileiro.

Para a construção das ETTJs, utilizamos os dados do mercado de swap DI-PRÉ referentes aos anos de 2006 e 2007. O modelo de N&S foi escolhido para ajustar os dados observados. As principais vantagens deste modelo são sua forma funcional simples, mas flexível, e o fato dele ser bastante usado por bancos centrais ao redor do mundo.

A ponderação pela liquidez dos ativos sugerida por Subramanian (2001) utiliza não só o volume negociado, mas também o número de negócios. Isto minimiza o possível impacto de *outliers*. Para Subramanian (2001) uma função liquidez deve ter duas propriedades principais: o peso dado aos ativos líquidos não deve ser muito diferente do peso dado ao ativo mais líquido e o peso dos ativos ilíquidos deve cair a uma taxa crescente. Subramanian (2001) argumenta que a função de tangente hiperbólica captura bem estas características. Assim, o autor constrói sua ponderação com base nesta função.

Ao calcularmos os pesos, observamos que há dois focos principais de negociação: na ponta curta da curva, dos vértices fixos de 60 a 390 dias corridos, e na ponta longa da curva, dos vértices fixos de 1200 a 2160 dias corridos. Em média, 70% da liquidez do swap DI-PRÉ está nestas maturidades – isto é, em apenas 16 dos 50 vértices fixos.

Para estimarmos as ETTJs, precisávamos antes achar o τ ótimo. Resolvemos este problema fazendo um *grid*, que nos permitiu encontrar o τ que maximiza o R^2 . O τ médio ótimo encontrado foi de 150 dias corridos tanto para as estimações por MQO, quanto para as estimações por MQP.

As ETTJs estimadas por MQO e por MQP não foram significativamente diferentes em duas das cinco observações. Nas outras três, houve uma pequena melhora no ajuste dos vértices líquidos. De um modo geral, porém, a magnitude da correção provocada pelo ajuste de Subramanian (2001) foi baixa.

Uma provável causa deste resultado é o próprio modo de construção das taxas referenciais de swap DI-PRÉ. Estas taxas são obtidas a partir da interpolação exponencial das taxas do mercado futuro de DI-1. Neste sentido, já ocorre uma aproximação das taxas

efetivamente observadas a uma forma funcional. Assim, quando ajustamos as taxas referenciais de swap DI-PRÉ ao modelo de N&S, estamos realizando uma *segunda* aproximação – o que tende a gerar resultados mais “tímidos”, dada a suavização anterior. É possível que o ajuste proposto por Subramanian (2001) produza resultados mais significativos caso seja aplicado *diretamente* ao mercado de DI-1.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORGES DA SILVEIRA, G. & BESSADA, O. Análise de Componentes Principais de Dados Funcionais - Uma aplicação às Estruturas a Termo de Taxas de Juros. **BACEN Working Paper**, nº 73, 2003.

BRITO, R., DUARTE, A. & GUILLÉN, O. O Prêmio pela Maturidade na Estrutura a Termo das Taxas de Juros Brasileiras. **BACEN Working Paper**, nº 72, 2003.

DIEBOLD, Francis X. & LI, Canlin. Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. **Journal of Econometrics**, v. 130, no 2, p. 337-364, 2006.

FERREIRA, Luiz F. **Manual de Gestão de Renda Fixa**. Porto Alegre: Bookman, 2004.

GUILLEN, O. & TABAK, B.. Characterizing the Brazilian Term Structure of Interest Rates. **BACEN Working Paper**, nº158, 2008.

HULL, John. **Options, Futures and Other Derivatives**. 6th Edition. Pearson, 2006.

LIMA, E., LUDUVICE, F. & TABAK, B. Forecasting Interest Rates: An Application for Brazil. **BACEN Working Paper**, nº 120, 2006.

MISHKIN, Frederic. **Moedas, Bancos e Mercados Financeiros**. 5ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

NELSON, Charles R. & SIEGEL, Andrew F. Parsimonious Modeling of Yield Curves. **The Journal of Business**, v. 60, no 4, 1987.

PRADO, Márcio Eduardo. **Uma Análise Empírica para a Estrutura a Termo da Taxa de Juros Brasileira: Usando o Algoritmo do Filtro de Kalman para Estimar os**

Modelos de Vasicek e Cox, Ingersoll e Ross. Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Economia, 2004.

ROSS, S., WESTERFIELD, R. & JORDAN, B. **Princípios de Administração Financeira.** São Paulo: Atlas, 2002.

SACHS, J. & LARRAIN, F. **Macroeconomics in the Global Economy.** 1st Edition. Prentice Hall, 1993.

SCHEINKMAN, J., KNEZ, P. & LITTERMAN, R. Explorations Into Factors Explaining Money Market Returns. **Journal of Finance**, v. 1, 1994.

SCHEINKMAN, J. & LITTERMAN, R. Common Factors Affecting Bond Returns. **Journal of Fixed Income**, v. 1, p. 54 – 61, 1991.

SUBRAMANIAN, K. V. Term Structure Estimation in Illiquid Markets. **Journal of Fixed Income**, v. 11, no 1, p. 77-86, 2001.

TABAK, B. & DE ANDRADE, S. Testing the Expectations Hypothesis in the Brazilian Term Structure of Interest Rates. **BACEN Working Paper**, nº 30, 2001.

VEREDA, Luciano. **Notas de Aula – Curso de Tópicos Especiais em Finanças I.** Rio de Janeiro: PUC, IAPUC, 2008.

Metodologia para Apuração de Curvas de Preços e de Spreads Teóricos de Títulos Públicos. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2006.

Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation. **BIS Papers**, nº 25, 2005.

8. OUTRAS REFERÊNCIAS

Taxas Referenciais de Swap DI-PRÉ:

<http://www2.bmf.com.br/pages/portal/portal/boletim1/TxRef1.asp>

Volume Negociado e Número de Negócios:

<http://www2.bmf.com.br/pages/portal/portal/boletim1/SistemaEletronicoSwaps.asp>

ETTJ Andima:

http://www.andima.com.br/est_termo/resultados/termo.html