

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

UM EXERCÍCIO QUANTITATIVO TEÓRICO EM FINANÇAS

Rafael Lopes de Melo

Matrícula: 9914177-3

Orientador: Marcos Antônio Coutinho da Silveira

DEZEMBRO 2002

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

UM EXERCÍCIO QUANTITATIVO TEÓRICO EM FINANÇAS

Rafael Lopes de Melo

Matrícula: 9914177-3

Orientador: Marcos Antônio Coutinho da Silveira

DEZEMBRO 2002

“Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realizá-lo, a nenhuma firma de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor tutor”.

“As opiniões expressas nesse trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor”.

**Agradecimentos:**

Agradeço aos professores Bryan Ellickson, Joris Pinkse e Marcos da Silveira pela inestimável ajuda na concepção desse trabalho e aos meus pais por tudo.

## ÍNDICE

|   |    |
|---|----|
| I – INTRODUÇÃO .....  | 6  |
| II – DESCRIÇÃO DO MODELO .....  | 10 |
| III – A CALIBRAGEM DO PROCESSO DE CRESCIMENTO DA DOTAÇÃO TOTAL<br>DA ECONOMIA.....            | 14 |
| III. 1 – Definindo o Processo .....   | 14 |
| III. 2 – A “Discretização” da Variável.....   | 16 |
| III. 3 – A Calibragem da Matriz de Transição .....  | 18 |
| IV – INFERÊNCIAS SOBRE APREÇAMENTO DE ATIVOS .....  | 22 |
| IV. 1 – A Equação Fundamental do Apreçamento de Ativos e Algumas<br>Representações Úteis..... | 22 |
| IV. 2 – Razões de Sharpe e o <i>Equity Premium Puzzle</i> .....                               | 27 |
| V – CONCLUSÕES .....  | 33 |
| BIBLIOGRAFIA.....   | 34 |
| APENDICE A.....   | 36 |
| APENDICE B.....   | 38 |

## ÍNDICE DE TABELAS E GRÁFICOS

### Tabelas

|  |    |
|--|----|
| III. 1- Matriz de transição estimada – Crescimento do consumo com 6 estados da natureza..... | 20 |
| IV. 1 – Fatos estilizados .....  | 29 |
| IV. 2 – Inclinação das FMV .....   | 29 |
| IV. 3 – Retorno do ativo sem risco.....  | 31 |
| A.1 – Frequências de cada estado da variável discreta .....                                  | 37 |
| A.2 – Violações da hipótese “ <i>birth and death</i> ” .....                                 | 37 |

### Figuras

|   |    |
|---|----|
| III. 1 - Crescimento do consumo com 6 estados – Histograma.....                               | 17 |
| III. 2 – Crescimento do consumo efetivo X Crescimento do consumo discreto com 6 estados ..... | 18 |
| IV. 1 – Fronteira de média variância incondicional .....                                      | 25 |
| IV. 2 – Fronteiras de média variância condicionadas aos possíveis estados da natureza .       | 26 |
| IV. 3 – Retorno do ativo sem risco X Retorno do índice CRSP .....                             | 28 |
| IV. 4 – Razões de Sharpe CRSP X Fronteiras previstas pelo modelo .....                        | 30 |
| IV. 5 – Rf Verificado X Rf predito pelo modelo (condicional) .....                            | 31 |

## I – INTRODUÇÃO

Este trabalho é sobre apreçamento de ativos em uma abordagem teórica. É o exercício de calibrar um modelo de equilíbrio geral a dados históricos e com isso fazer inferências sobre resultados e questões usuais da literatura de finanças, como o comportamento do retorno e da variância de ativos.

Modelos de equilíbrio geral de trocas são amplamente utilizados no campo de finanças desde Lucas (1978). Esta abordagem consiste em definir um caminho exógeno para a dotação dos agentes e com isso fazer inferências sobre o comportamento do mercado de ativos. Essa abordagem claramente ignora a endogeneidade do consumo na economia, de maneira que um modelo de equilíbrio geral com produção seria mais apropriado. O problema é que ainda não há um modelo com produção com resultados satisfatórios e, além disso, apesar da abordagem de definir um caminho exógeno para a dotação dos agentes parecer um tanto ingênua, nós podemos chegar a “bons” resultados se especificarmos o processo de forma coerente. Discussões do assunto podem ser encontradas em Cochrane (2001) e Ellickson (a ser publicado).

Em 1985 Mehra e Prescott usaram uma versão adaptada do modelo de Lucas para tratar uma questão bem específica: por que o retorno do mercado de ações é tão maior do que o retorno dos supostos ativos sem risco – um prêmio de 6.18% no período de 1889 – 1978 nos EUA. O exercício consistiu em usar uma versão do modelo de Lucas de maneira que eles pudessem “calibrá-lo” a dados históricos e ver o que o modelo tinha a dizer sobre a questão proposta, enfatizando que não era um exercício de estimação, mas sim “...a quantitative theoretical exercise...”. O principal resultado foi que o modelo não era capaz de responder a questão de maneira satisfatória, criando um *puzzle*.

O que se seguiu foi um dos artigos mais comentados nos últimos 20 anos em economia. Tentativas de se resolver o *puzzle* ajudaram a desenvolver e criar diversas áreas da literatura de finanças como preferências condicionadas ao hábito (*habit preferences*), tentativas de introduzir heterogeneidade nos consumidores, finanças comportamentais

(*behavior finance*) e outras. Excelentes resenhas bibliográficas descrevendo os desenvolvimentos do campo e a importância do artigo de Mehra e Prescott podem ser encontrados em Campbell (2000), Constantinides (2002) e Mehra (2002).

Surpreendentemente a abordagem de se modificar a estrutura probabilística da economia parece ainda não ter sido esgotada. No artigo original, Mehra e Prescott assumiram que o crescimento da dotação total da economia segue uma Cadeia de Markov com dois possíveis estados de natureza e apenas um parâmetro para simplificar, alegando que o resultado era robusto a especificações diferentes. Rietz (1988) mostrou que se modificarmos as probabilidades de maneira a admitir grandes desastres com uma probabilidade bastante baixa se resolve o *puzzle*, mas foi imediatamente refutado pelos autores originais (1988) que julgaram sua hipótese absurda. Depois disso pouco se fez.

Nessa linha de atuação se encontra o modelo proposto por Ellickson (a ser publicado), que estende a cadeia de Markov para um caso geral como primeiro caso. A motivação é que provavelmente ainda se tem o que explicar usando modelos com uma estrutura simples antes de se entrar mais a fundo em tópicos como preferências mais realísticas, limitações de crédito ou introduzir produção ao modelo. Meu trabalho consiste basicamente em usar uma especificação desse modelo mais geral, calibrá-lo a dados históricos e tentar capturar o que o modelo tem a dizer naquela especificação. Minha intenção não é resolver o *puzzle* ou a uma questão em específico. Minha motivação é o exercício quantitativo teórico por si só.

Ao longo do trabalho utilizarei o modelo proposto por Ellickson (a ser publicado): uma economia de trocas em múltiplos períodos definida sobre um espaço de probabilidade filtrado, com um “grande” número de consumidores cada um com seu conjunto de consumo, processo estocástico para sua dotação e uma função de utilidade; e um número arbitrário de ativos negociados competitivamente. Este modelo foge da tradição de se representar a economia com um único agente representativo ao introduzir um número grande de agentes (não necessariamente iguais), o que parece uma maneira mais natural de se tratar a questão.

Eu utilizarei uma versão simplificada do modelo, assumindo que todos os consumidores têm uma função de utilidade do tipo *time separable power* (ou simplesmente

power) e que os mercados são completos. Nessa especificação o resultado de equilíbrio assegura que existe um fator de desconto estocástico único, que depende do crescimento do consumo agregado e de parâmetros de aversão ao risco/desconto intertemporal. Com o fator de desconto estocástico nos podemos utilizar a equação fundamental do apreçamento<sup>1</sup> de ativos para derivar importantes resultados para a nossa economia como o retorno de um ativo sem risco e fronteiras de média-variância (FMV). Na verdade, como Cochrane (2001) enfatiza em seu livro, uma grande variedade de temas da literatura de finanças podem ser vistas como aplicações da equação fundamental.

*A equação fundamental de apreçamento de ativos:*

$$P_t = E(m_{t+1} \cdot X_{t+1} / I_t)$$

$$m_{t+1} = \beta \cdot \left( \frac{e_{t+1}}{e_t} \right)^{-\gamma},$$

onde  $E$  denota expectância,  $P$  = Preço do ativo,  $m$  = fator de desconto estocástico,  $X$  = payoff do ativo,  $I$  = o conjunto informacional,  $e$  = dotação total da economia,  $\beta$  = parâmetro de desconto intertemporal e  $\gamma$  = parâmetro de aversão ao risco e elasticidade de substituição entre períodos/estados da natureza (date/events).

A maior parte do trabalho se concentrará no esforço de modelar o fator de desconto estocástico ( $m_t$ ). Como pode ser visto na equação acima ele depende de 3 elementos: os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  serão tratados da maneira usual em exercício de calibragem (valores “razoáveis” determinados pela literatura) e a dotação total da economia ( $e_t$ ) que será tratado a seguir.

Eu assumo o processo de crescimento da dotação total da economia seguir uma cadeia de Markov do tipo “birth and death” com um número finito (pequeno) de “estados da natureza” (ou simplesmente estados). Isso é basicamente uma extensão do exercício de Mehra e Prescott e a motivação aqui é utilizar uma distribuição simples de se tratar

---

<sup>1</sup> Terminologia tirada de Ellickson (a ser publicado). Cochrane (2001) se refere como a “equação básica de apreçamento”

analiticamente, mas que ao mesmo tempo considera dependência intertemporal e a possibilidade de se analisar o que acontece com a economia em cada estado da “natureza” (por ser discreta). Para calibrar a matriz de transição do processo de Markov eu utilizarei dados de consumo agregado da economia Americana, pelo tamanho da serie e confiabilidade, e utilizarei a técnica GMM, não dando muita ênfase em testes de especificação já que a intenção aqui não é encontrar um processo que descreva perfeitamente o consumo, mas sim um que seja tratável, concorde com a intuição e também seja conectado a dados reais.

O trabalho será dividido nas seguintes seções: na seção II descrevo o modelo; na seção III descreverei os passos na calibragem do processo de crescimento da dotação da economia; na seção IV terminarei de calibrar  $m_t$  e caracterizarei resultados usuais da literatura de finanças, contrastando com dados empíricos; finalmente a seção V conclui.

## II – DESCRIÇÃO DO MODELO

Ao longo do trabalho utilizo uma versão simplificada do modelo de equilíbrio geral proposto por Ellickson (a ser publicado). Nesta seção mostrarei de forma reduzida as partes relevantes para o exercício, que são a equação fundamental do apreçamento de ativos e sua relação com o equilíbrio Arrow-Debreu.

Assim como em Lucas (1978) e em Mehra e Prescott (1985), eu utilizo um modelo de equilíbrio geral sem produção e, por simplicidade, um único *bem* perecível é transacionado. Essa economia de puras trocas é definida como a coleção:  $\{(X_a, e_a, U_a) | a \in A\}$ . Ou seja, existe um número finito de agentes  $A$ , cada um com seu conjunto de possibilidades de consumo  $X_a$ , sua dotação  $e_a$  (quando utilizado sem o subscrito “a” se refere à dotação agregada) e uma função de utilidade  $U_a$ . Essa economia é definida sobre uma árvore de eventos finita com conjunto de períodos  $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots, T\}$  e espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, P, I_t)$ . Isso significa que a economia funciona em múltiplos períodos, tem incerteza e o conjunto informacional corrente é conhecido pelos agentes e atualizado a cada período. (as variáveis são processos estocásticos).

Os preços são definidos como o processo  $(P: \tau \times \Omega \rightarrow R)$ . Com isso conseguimos calcular o equilíbrio Arrow-Debreu (AD) para essa economia. Esse equilíbrio é uma coleção de alocações de consumo (para cada agente) e preços contingentes de maneira que as alocações sejam factíveis (obedecem a restrições orçamentárias tanto ao nível do indivíduo quanto socialmente) e maximizem a utilidade de cada agente. Uma possível interpretação para esse equilíbrio é a de que na data 0 os consumidores negociam sua dotação em todas as datas/estados da natureza futuros, como se fosse uma transação num mercado de futuros. Assim como em Mehra e Prescott, assumo as funções de utilidade dos indivíduos serem do tipo *time separable power*, com os mesmo parâmetros.

*O equilíbrio Arrow-Debreu no caso de funções de utilidade do tipo power: (para  $s \in S$ )*

$$\text{As funções de utilidade} \quad U_a(c_a(t, v_t)) = \frac{[c_a(t, v_t)]^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (\text{Eq II.1})$$

$$\text{Os preços de equilíbrio} \quad p(t, v_t) = \beta^t \cdot P[v_t] \cdot \left[ \frac{e(0)}{e(t, v_t)} \right]^\gamma \quad (\text{Eq II.2})$$

$$\text{As alocações de equilíbrio} \quad c_a(t, v_t) = \left[ \frac{p \cdot e_a}{p \cdot e} \right] \cdot e(t, v_t) \quad (\text{Eq II.3}),$$

onde  $c_a(t, v_t)$  é o consumo na data  $t$ , evento  $v_t$ ,  $\gamma$  = parâmetro de aversão ao risco,  $\beta$  = parâmetro de desconto intertemporal,  $P[v_t]$  = probabilidade condicionada do evento  $v_t$ ,  $p \cdot e$  e  $p \cdot e_a$  são funções lineares de preço, ou seja, a soma do produto das duas variáveis em todas as possíveis datas/eventos.

Agora temos que fazer algumas modificações para fazer esse modelo tratar de apreçamento de ativos: os agentes, na data 0, negociam “poder de compra” ao invés de bens contingentes. Isto é, ao invés de negociar direitos sobre bens no futuro os agentes compram estes no mercado a vista e utilizam como instrumento para negociar poder de compra ativos, como ações, títulos, etc. Arrow (1953) mostra que em situações de mercados completos o equilíbrio AD pode ser atingido dessa maneira.

Uma hipótese adicional que faço é a de que os mercados são completos. A maioria dos resultados apresentada aqui é válida no caso de mercados incompletos, mas não achamos relevante para esse exercício introduzir essas complicações adicionais. Portanto a economia possui um número de ativos transacionados competitivamente e pagando dividendos em cada período/estado da natureza.

Derivações adicionais asseguram que para o caso de mercados completos existe um único  $m_t$  (fator de desconto estocástico) de maneira que:

*A equação fundamental do apreçamento de ativos*

$$P_t = E(m_{t+1} \cdot X_{t+1} / I_t) \quad (\text{Eq II.4}),$$

onde  $P_t =$  Preço do ativo,  $m_t =$  Fator de desconto estocástico,  $X_t =$  payoff do ativo,  $I_t =$  Conjunto informacional acumulado

Essa equação diz que o preço de um ativo é o valor futuro esperado dos *payoffs*, descontado por um fator  $m_t$ . É importante enfatizar que esse fator é o mesmo para qualquer ativo dessa economia, o que torna esse resultado muito forte, dado que a existência desse fator sequer depende de condições muito fracas. Ao compararmos as funções lineares de preço nota-se uma importante ligação entre o apreçamento dos ativos e os preços do equilíbrio AD. No caso de indivíduos com utilidade do tipo *power* temos:

O fator de desconto estocástico:

$$m_{t+1} = \beta \cdot \left( \frac{e_{t+1}}{e_t} \right)^{-\gamma} = \beta \cdot (g_{t+1})^{-\gamma} \quad (\text{Eq II.5}),$$

$$\text{onde } g_{t+1} = \frac{e_{t+1}}{e_t}$$

Essa especificação trás uma forte intuição para a nossa equação de apreçamento. O termo de desconto é uma função inversamente relacionada à taxa de crescimento da dotação agregada da economia<sup>2</sup>. Ou seja, os ativos que pagam altos dividendos quando a economia está crescendo muito serão menos valorizados (tem um preço menor) do que os ativos que pagam muito quando a economia está em recessão. A impaciência e a aversão ao risco são representadas pelos parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  respectivamente. Então, toda a fonte de risco sistemático da economia se resume a flutuações no consumo agregado, e somente o risco sistemático é relevante em termos de se descontar *payoffs* futuros.

Ao longo do trabalho basicamente trabalharei com a equação fundamental do apreçamento de ativos (eq II.4) e com resultados derivados dela. Para isso temos de trabalhar com uma estrutura probabilística para  $m_t$ , que depende estocasticamente somente

---

<sup>2</sup>Como toda a dotação agregada é consumida em equilíbrio, essa taxa corresponde à taxa de crescimento do consumo agregado.

de  $g_{t+1}$ . Sigo o exemplo de Mehra e Prescott e assumo que este segue uma cadeia de Markov do tipo *birth and death*<sup>3</sup>, com um número finito (pequeno) de estados da natureza.

A modelagem do processo de crescimento do consumo é um passo muito importante no exercício, dado que ao fazermos isso estamos definindo a distribuição de probabilidade assumida pelos agentes ao negociar ativos. Isso ocorre pelo fato de o risco sistemático da economia ser representado por flutuações na dotação agregada da economia. Na próxima seção continuo com essa modelagem, calibrando esse processo a dados reais de consumo da economia.

---

<sup>3</sup> Mehra e Prescott usam uma cadeia de Markov com somente dois estados da natureza, o que a torna do tipo *birth and death* por construção.

### III – A CALIBRAGEM DO PROCESSO DE CRESCIMENTO DA DOTAÇÃO TOTAL DA ECONOMIA

#### III.1 – Definindo o Processo

Agora que defini o modelo, eu calibrarei seus parâmetros de maneira que eu use uma especificação o mais próximo possível de dados reais. Nessa seção eu continuarei de onde terminei a última: o processo de crescimento da dotação total da economia. É importante enfatizar que esse é um passo muito importante no exercício, dado que numa economia de simples trocas a fonte de incertezas da economia provém da incerteza quanto às dotações dos indivíduos. Como a dotação total da economia é simplesmente a soma das dotações individuais em um determinado período/”estado da natureza”, nós temos a incerteza da economia modelada quando definimos esse processo. Como Mehra e Prescott (1985) diriam, “*they (o nível de consumo agregado e seu crescimento) constitute legitimate state variables for the model*”.

Como eu já disse antes, eu assumo que o crescimento da dotação total da economia (em  $\log - \ln(g_t)$ ) segue uma cadeia de Markov com um número finito de “estados da natureza”(s). Esse último comentário não é um simples formalismo; ao fazer isso eu estou assumindo que minha variável pode assumir alguns poucos valores, digamos 5,6. Isso pode soar um tanto absurdo, dado que essa variável é contínua por natureza. No entanto, você pode ver esse procedimento como se nós estivéssemos agrupando os possíveis valores da variável aleatória em um pequeno número de classificações com algum significado como, por exemplo: se o consumo cair mais de 1% nós nos encontramos em um período de recessão, enquanto que se o consumo crescer mais de 3% esse é um bom período para os consumidores. Me parece razoável assumir que os investidores pensam não em termos de um contínuo de possíveis valores para  $g_t$ , mas sim em termos de classes mais abrangentes como a economia irá “bem”, ou a situação ficará “estagnada”. Nessa discretização os

pontos de quebra e o número de possíveis valores para a variável são arbitrários e basicamente segue a intuição, como mostrarei em seguida.

Uma propriedade de qualquer cadeia de Markov discreta é que toda informação relevante para as probabilidades de um certo evento no próximo período é o que aconteceu no período corrente, sendo toda a informação passada dispensável. Isto é, para determinar o que acontecerá no próximo período não interessa como se chegou ao “estado da natureza” corrente, mas sim em que estado você se encontra. Esta é uma estrutura de dependência temporal bastante simples, no obstante com um poder explicativo bastante poderoso, dado que é usada para modelar várias situações reais, e que também nos permite lidar com ela de uma forma simples analiticamente.

Outra característica importante desse tipo de processo, mas agora peculiarmente das cadeias de Markov da classe “Birth and Death”, é que um “estado da natureza” somente pode “visitar seus vizinhos”. Isto é, estou assumindo que o crescimento do consumo não varia radicalmente de um período para o outro. Isso será levado em conta no processo de escolha da especificação.

Esse processo estocástico é completamente caracterizado por sua matriz de transição:

*A matriz de transição de uma cadeia de Markov do tipo Birth and Death:*

$$P = \begin{pmatrix} r_1 & p_1 & & & \\ q_2 & r_2 & p_2 & \mathbf{0} & \\ & & \dots & & \\ \mathbf{0} & q_{s-1} & r_{s-1} & p_{s-1} & \\ & & q_s & r_s & \end{pmatrix}_{S \times S},$$

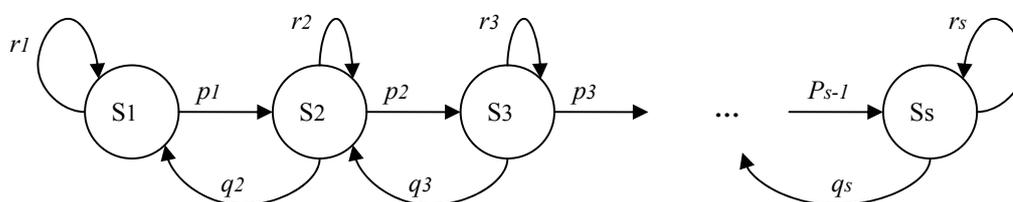
onde para a Cadeia de Markov  $X_n$ , com espaço de estados  $S = (S_1, S_2, \dots, S_s)$  cada termo da matriz  $P_{i,j} = \Pr(X_{n+1} = S_j / X_n = S_i)$ . (*Pr* denota probabilidade)

Note que  $\sum_{j=1}^s P_{i,j} = 1, \forall i \in (1, 2, \dots, s)$  (*essa é uma matriz estocástica*)

e  $P_{i,j} = 0$  if  $|i - j| > 1, \forall i, j \in (1, 2, \dots, s)$  (a *propriedade Birth and Death*)

Uma hipótese adicional que faço é que esse processo é fracamente estacionário. Essa hipótese é importante, por que ela me permite estimar os parâmetros dessa matriz utilizando momentos da distribuição de forma consistente, por causa da lei fraca dos grandes números.

Um desenho representativo do processo: (as variáveis acima das setas denotam probabilidades)



Agora descreverei o processo de “discretização” dos dados e em seguida como os parâmetros da matriz de transição foram estimados.

### III.2 – A “Discretização” da Variável

Primeiramente, acho importante dizer qual série utilizei como proxy para o consumo agregado: gastos reais com o consumo pessoal, série trimestrais (bilhões de dólares encadeados (1996) ajustados sazonalmente em taxas anuais). A janela de estimação vai de 1947.1 ate 2001.4 e a fonte é o *Bureau of Economic Analysis* (tabela NIPA 1.2 linha 2). O crescimento do consumo agregado segue a definição  $\ln(g_{t+1}) = \ln\left(\frac{e_{t+1}}{e_t}\right)$  onde usei os dados mencionados como uma aproximação para a dotação agregada.

Como esse é um exercício de cunho teórico geral, e não levando em conta as especificidades da economia brasileira, utilizei dados da economia americana dado que essa me proporcionou uma série longa e cujos dados são confiável, portanto sendo mais apropriados para esse exercício.

Eu utilizei dois métodos para discretizar os dados: Primeiro eu apliquei o logaritmo natural em  $g_t$ , peguei o máximo e o mínimo dessa nova série e dividi o intervalo em um número arbitrário de intervalos iguais. O segundo método segue mais uma intuição estatística: eu dividi os intervalos definindo as “quebras” com base em um número arbitrário de desvios padrão em relação a media. Eu trato isso com mais detalhes no apêndice A.

Depois de analisar as diferentes series de consumo discreto obtidas, cheguei a conclusão que a divisão da série em 6 “estados da natureza” (ou apenas estados) usando-se o método de media-desvios padrão é o mais apropriado. Detalho esse ponto no Apêndice A, mas adianto que alguns dos pontos mais importantes ao tomar essa decisão foram: violações da hipótese *birth and death* (a variável move bruscamente de um período para outro), número de observações em cada estado da natureza e o ganho em relação à maior riqueza da estrutura por possuir mais estados.

Figura III.1- Crescimento do consumo com 6 estados - Histograma

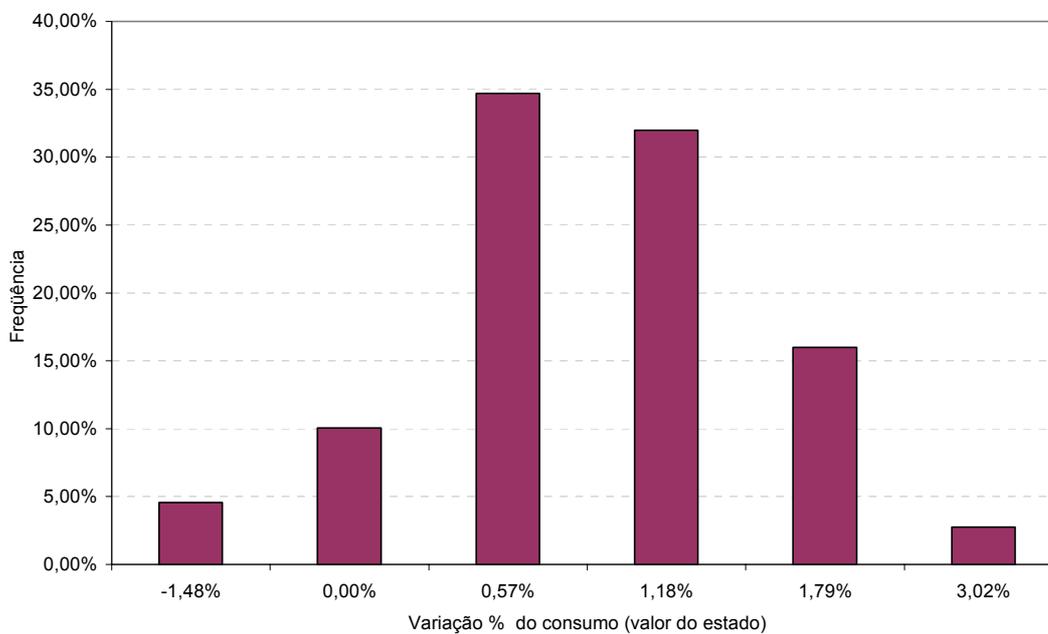
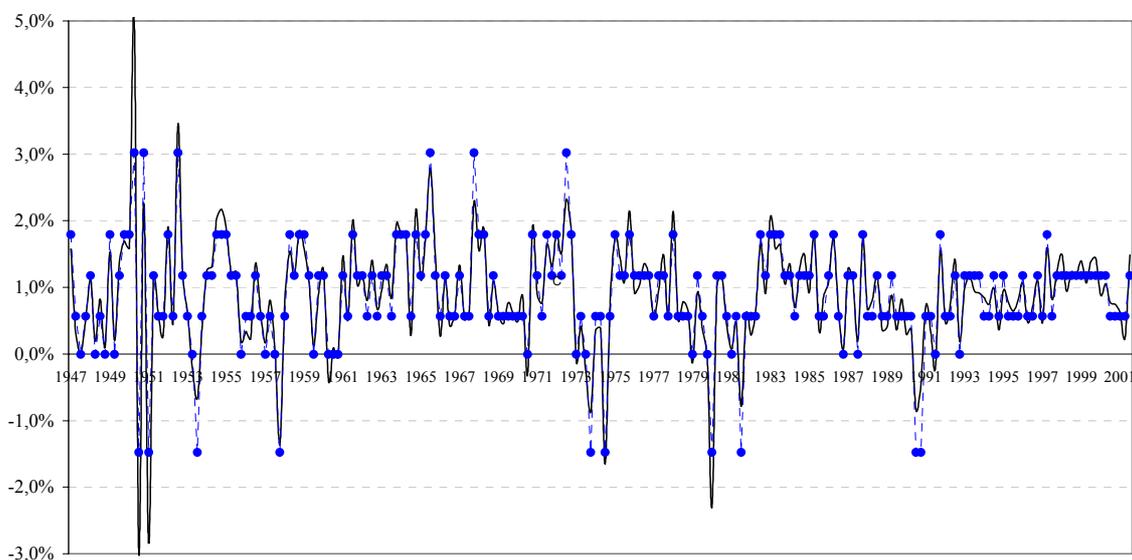


Figura III.2 - Crescimento do consumo efetivo X Crescimento do consumo discreto com 6 estados



### III.3 – A Calibragem da Matriz de Transição

Na última subseção eu preparei os dados de maneira que eu possa aplicar o ultimo passo da calibragem: a estimação dos parâmetros da matriz de transição. Assim que o fizermos teremos a estrutura de probabilidade da economia definida.

Para estimar os parâmetros dessa matriz eu farei uso da estrutura de probabilidade que eu impus. Como eu assumi a variável ser estacionária (nenhum absurdo, já que o próprio formato da série nos dá evidencia disso) eu posso estimar de maneira consistente os momentos teóricos da distribuição por suas médias amostrais.

Finalmente a técnica utilizada para estimar os parâmetros foi a GMM (método generalizado dos momentos). Aqui você usa alguns momentos implicados pela distribuição assumida e as correspondentes versões amostrais, ambos dependendo dos parâmetros a serem estimados. Você deve construir os momentos teóricos de maneira que eles igualem 0, e assim você escolhe os parâmetros a fim de que os momentos amostrais fiquem o mais

próximo de 0 o possível. Como estamos lidando com vetores montamos um problema de minimização para encontrar os resultados.

*O método GMM:*

*Seja o processo estocástico  $X_n$ ;  $\Theta$  o vetor de parâmetros a serem estimados;  $U(\Theta)$  um vetor de momentos teóricos para  $X_n$  de maneira que  $U(\Theta)=0$ ; e finalmente  $\hat{U}(\Theta, \text{dados})$  seu correspondente amostral, obedecendo a  $\hat{U}(\Theta, \text{dados}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U(\Theta)$*

*O estimador GMM é o vetor  $\hat{\Theta}$  que satisfaz o seguinte problema de minimização :*

$$\min_{\hat{\Theta}} \left[ \left( \hat{U}(\hat{\Theta}, \text{dados}) \right)^T \cdot W \cdot \left( \hat{U}(\hat{\Theta}, \text{dados}) \right) \right], \text{ para alguma matriz não singular } W.$$

Se você escolher a especificação apropriada o estimador GMM é o mais eficiente em uma classe muito abrangente de estimadores, na qual se encontram OLS , IV, máxima verossimilhança entre outros. Os requerimentos para consistência são que os momentos teóricos utilizados igualem 0 e que suas contrapartidas amostrais convirjam para os momentos teóricos. Especificamente nesse caso eles são atendidos (é claro que seguindo o paradigma da estimação clássica, assumo utilizar o modelo correto). Discussões sobre o método GMM e suas propriedades podem ser encontradas em Cochrane (2001) ou Hansen (1982) para uma abordagem mais profunda.

Descrevo o procedimento com mais detalhes no apêndice B. Mostro agora os resultados, mas antes uma breve digressão. Como venho mencionado ao longo do texto eu estou fazendo uma calibragem, não um exercício de estimação propriamente dito. Estou usando um estimador bastante poderoso para obter meus resultados, mas não entrarei muito a fundo em detalhes do procedimento, como se estou usando a especificação mais eficiente ou testes de especificação, pela razão que eu não espero que o modelo não “sobreviva” a uma bateria de testes. Exercícios de calibragem tem sua credibilidade e discussões sobre isso podem ser encontradas em Heckman e Hansen (1996).

A matriz de transição estimada utilizando-se os dados referidos e uma matriz identidade como a matriz de pesos é: (mais detalhes no apêndice B)

Tabela III.1 - Matriz de transição estimada - Crescimento do consumo com 6 estados da natureza

|    | S1           | S2           | S3           | S4           | S5           | S6           | Distribuição estacionária | Valor do estado (% crescimento) |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------------------|---------------------------------|
| S1 | <b>0,564</b> | <b>0,436</b> | 0,000        | 0,000        | 0,000        | 0,000        | 5,677%                    | -1,477%                         |
| S2 | <b>0,222</b> | <b>0,361</b> | <b>0,417</b> | 0,000        | 0,000        | 0,000        | 11,156%                   | -0,005%                         |
| S3 | 0,000        | <b>0,165</b> | <b>0,389</b> | <b>0,446</b> | 0,000        | 0,000        | 28,230%                   | 0,567%                          |
| S4 | 0,000        | 0,000        | <b>0,371</b> | <b>0,406</b> | <b>0,223</b> | 0,000        | 33,995%                   | 1,177%                          |
| S5 | 0,000        | 0,000        | 0,000        | <b>0,444</b> | <b>0,449</b> | <b>0,106</b> | 17,092%                   | 1,794%                          |
| S6 | 0,000        | 0,000        | 0,000        | 0,000        | <b>0,472</b> | <b>0,528</b> | 3,848%                    | 3,021%                          |

Recessão esperada: 3.618 trimestres

Expansão esperada: 17.864 trimestres

Agora temos a tão desejada matriz, mas e agora? O que ela nos diz sobre as propriedades da estrutura da incerteza da economia? Muito eu diria.

Primeiramente, acho interessante notar que existe uma forte simetria entre os estados da natureza superiores (5 e 6) e os inferiores (1 e 2), em relação aos centrais. Note que não estou falando sobre a definição de uma matriz simétrica, o ponto que quero enfatizar aqui é que as probabilidades de se atingir os estados centrais, com você estando acima ou abaixo são bastante similares, assim como o movimento de dentro para fora.

Essa especificação nos diz que aproximadamente durante 17% do tempo a economia esta em crescimento negativo (estados 1 e 2), 62% crescendo em taxas medianas (3 e 4) e em cerca de 21% dos períodos a economia esta em forte expansão (5 e 6). Esses resultados foram obtidos da distribuição estacionária do processo, que pode ser interpretada como a frequência de longo prazo de cada estado.

Para ilustrar a coerência dessa especificação eu fiz o exercício de comparar as predições do modelo para o tempo esperado de recessões e expansões da economia com valores reais dessas esperanças. Essas questões podem ser facilmente respondidas em cadeias de Markov, utilizando-se resultados de *hitting times*. A duração de recessões é definida como o número de períodos consecutivos em que a economia enfrenta crescimento negativo,

enquanto que a de uma expansão é o numero de períodos consecutivos em que a economia esta com crescimento positivo.

O modelo diz que uma recessão dura em média 3.62 trimestres, enquanto uma expansão 17.9 trimestres. O NBER (<http://www.nber.org/cycles.html>) diz que para o período de 1945 – 1991 a contração média durou 3.66 trimestres e a expansão média 16.7 trimestres.

## IV - INFERÊNCIAS SOBRE APREÇAMENTO DE ATIVOS

### IV.1 - A Equação Fundamental do Apreçamento de Ativos e Algumas Representações Úteis

Na última seção determinei a estrutura de probabilidade da economia. Nessa eu usarei esses resultados para ver como o mercado de ativos se comportaria se a economia tivesse a estrutura probabilística assumida. Toda a análise ficará centrada em uma equação: a equação fundamental do apreçamento de ativos, que apresentei na seção II.

O nome dessa equação não superestima sua importância. Ela é formal e intuitiva: O preço corrente de um ativo é o valor esperado, descontado dos payoffs futuros. É importante enfatizar que todos os ativos são descontados por um termo de desconto único ( $m_t$ ). Lembrando da seção II:

$$P_t = E(m_{t+1} \cdot X_{t+1} / I_t) \quad (Eq II.4)$$

$$\text{nesse caso} \quad m_{t+1} = \beta \cdot (g_{t+1})^{-\gamma} \quad (Eq II.5)$$

Trabalhando-se um pouco a equação II.4 chegamos a representações bastante úteis. Aqui eu trabalharei com Fronteiras de Média-Variância. Essa representação usa a equação II.4 de uma forma inteligente, impondo fronteiras para os momentos dos retornos dos ativos (médias, variâncias e covariâncias). Logo voltarei a isso, mas antes tenho algumas considerações acerca do procedimento de calibragem.

Nos próximos passos eu utilizarei de forma intensiva o fator de desconto estocástico ( $m_{t+1}$ ). Na última seção determinei os valores e a estrutura de probabilidade de  $g_{t+1}$ , um de seus componentes, mas ainda falta tratar os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$ . O  $\beta$  é o parâmetro de desconto temporal, enquanto que o parâmetro  $\gamma$  capta a aversão ao risco e a elasticidade de substituição de tempo e estado da natureza. Esses parâmetros resultam da agregação das

preferências dos indivíduos e se tem uma extensa literatura em microeconomia sobre valores “razoáveis” para eles. Seguindo a tradição dos exercícios usuais de calibragem, eu utilizarei os valores dessa literatura para esses parâmetros, ciente de que há críticas para esse procedimento (Heckman e Hansen, 1996). Assumo o  $\beta$  valer 0.99; enquanto que para o  $\gamma$  testo diferentes valores ao fazer minhas inferências (Mehra e Prescott em 1985 consideram 10 um limite superior aceitável para esse parâmetro).

#### *Fronteiras de Média-Variância*

*Eq II.4 é equivalente a*

$$1 = E(m_{t+1} \cdot Rn_{t+1} / I_t) \quad (\text{Eq IV.1})$$

$$\text{Aonde para o ativo } n, \quad Rn_{t+1} = \frac{Xn_{t+1}}{Pn_t}$$

*Esta é a chamada representação em retorno ( $Rn_{t+1}$ ) da mesma equação. Essa representação é bastante útil, dado que nos permite trabalhar com uma variável com um comportamento notadamente estacionário (retornos), ao invés de variáveis com uma clara tendência de crescimento ao longo do tempo (Preços e dividendos).*

*Suponha existir um ativo que proporcione um retorno “certo”  $Rf_t$  em  $t+1$  (o retorno no ativo sem risco). Decorre da equação IV.1:*

$$E(m_{t+1} / I_t) = \frac{1}{Rf_t} \quad (\text{Eq IV.2})$$

*Aplicando a definição de covariância em IV.1 e juntando à equação IV.2 obtemos:*

$$1 = \frac{E\left(\frac{Rn_{t+1}}{I_t}\right)}{Rf_t} + \text{cov}\left(\frac{Rn_{t+1}}{I_t}, \frac{m_{t+1}}{I_t}\right) \quad (\text{Eq IV.3})$$

*Defino os retornos em excesso como:*

$$E(Rn_{t+1}^e/I_t) = E(Rn_{t+1}/I_t) - Rf_t$$

De volta a equação IV.3, deixe:

$$\rho_{m,Rn} = \frac{\text{cov}(m_{t+1}, Rn_{t+1}/I_t)}{\sigma(m_{t+1}/I_t) \cdot \sigma(Rn_{t+1}/I_t)} \text{ onde } \sigma \text{ denota desvio padrão.}$$

4.3 pode ser reescrita como:

$$E(Rn_{t+1}^e/I_t) = -\rho_{m,Rn} \cdot \frac{\sigma(m_{t+1}/I_t)}{E(m_{t+1}/I_t)} \cdot \sigma(Rn_{t+1}/I_t)$$

como  $\rho_{m,Rn} \in [-1, 1]$ , temos:

$$\left| E(Rn_{t+1}^e/I_t) \right| \leq \frac{\sigma(m_{t+1}/I_t)}{E(m_{t+1}/I_t)} \cdot \sigma(Rn_{t+1}/I_t) \quad (\text{Eq IV.4})$$

IV.4 é a equação das **fronteiras de Média-Variância (FMV)** dessa economia.

As derivações acima podem ser encontradas em qualquer livro de finanças. O que utilizarei daqui em diante será a equação IV.4, como mencionei anteriormente. Essas representações nos permitem analisar risco e retorno dos ativos em termos de limitações para os momentos da variável, como média, variância e covariâncias. Se acreditarmos que os retornos dos ativos são estacionários, esses momentos teóricos podem ser estimados consistentemente a partir de suas contrapartidas amostrais.

Note que a equação IV.4 é expressa em termos de esperanças condicionais. Isto é, dado que você sabe tudo que aconteceu até a data t (o conjunto informacional  $I_t$ ), você tira esperanças do que vai ocorrer em t+1. Na Seção III determinei que toda a incerteza é modelada de maneira que o que vai ocorrer em t+1 depende somente do que aconteceu até a data t (propriedade da cadeia de Markov). Então para cada possível realização em t as probabilidades do que vai ocorrer em t+1 diferem. Com isso se conclui que para nosso caso temos 6 diferente FMV para essa economia, cada um correspondendo a um possível estado da natureza (valor de  $g_t$ ) em t.

Além das FMV condicionais, existe a chamada Fronteira de Média-Variância incondicional. A um nível prático essa corresponde às equações condicionais, porém derivadas com momentos incondicionais. Assumi a cadeia de Markov ser aperiódica e recorrente, o que implica que a distribuição incondicional das variáveis da economia corresponde a distribuição estacionária que já calculamos ( $\pi$ ). No entanto, em termos teóricos, essa equação tem um significado muito mais forte do que essas simples contas sugerem. Quando trabalha com momentos incondicionais ao invés dos momentos condicionais, o teorista está admitindo que trabalha com um conjunto informacional inferior ao dos agentes dos mercados. Existe uma relação entre os momentos condicionais e incondicionais, porém não entrarei a fundo nesse assunto. Discussões sobre isso podem ser encontradas em Hansen e Richard (1987), Cochrane (2001) e Ellickson (a ser publicado). Em seguida ilustro as FMV para essa economia assumindo  $\beta=0.99$  e  $\gamma=5$ .

Figura IV.1 - Fronteira de média variância incondicional

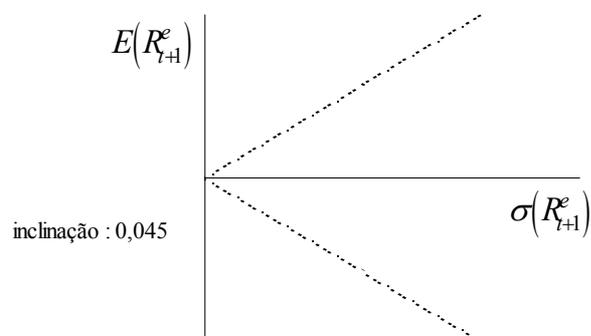
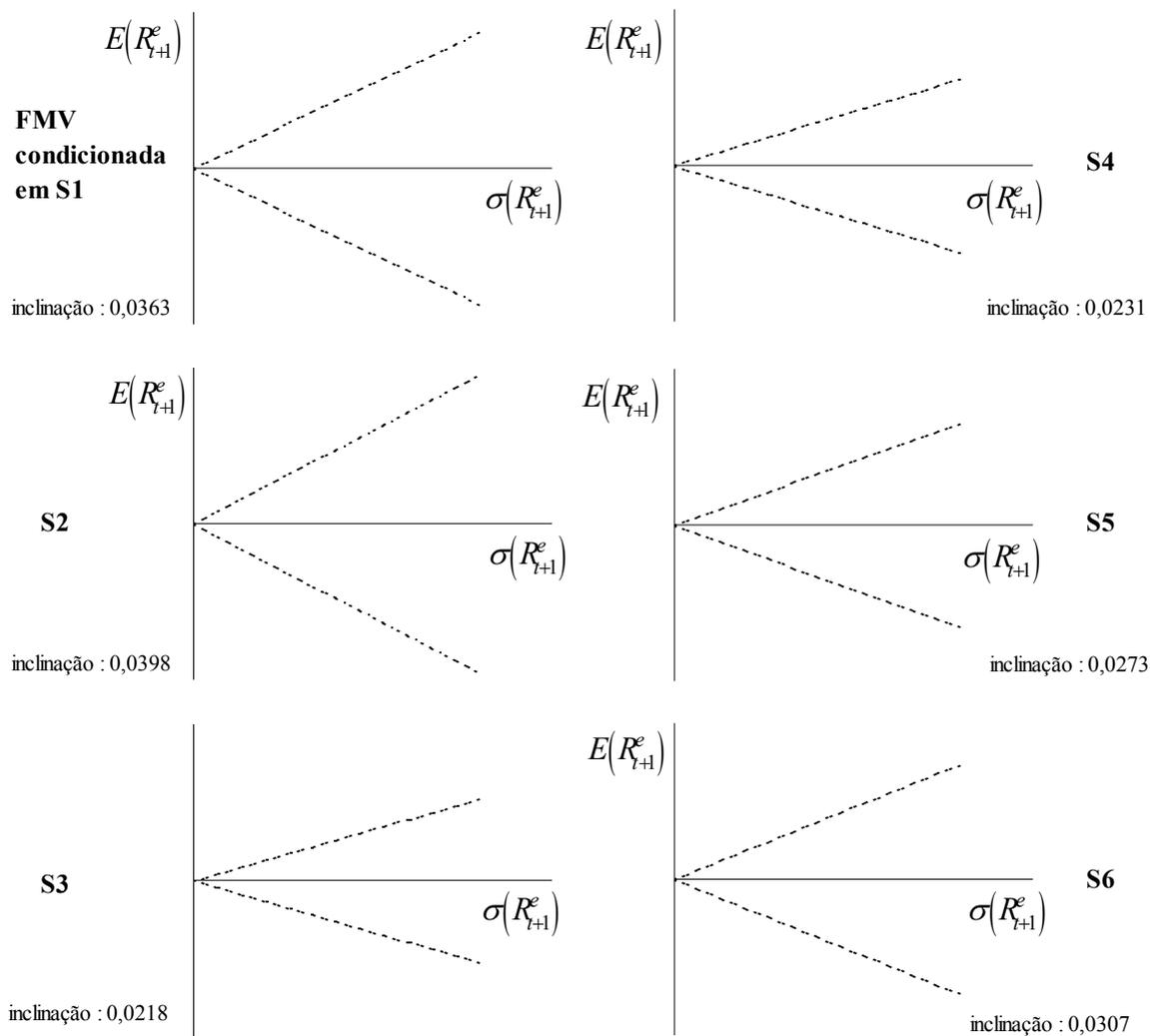


Figura IV.2 - Fronteiras de média variância condicionadas aos possíveis estados da natureza



Resultados interessantes podem ser tirados desses gráficos:

Primeiramente, note que a fronteira de Média-Variância incondicional tem uma inclinação mais acentuada que as condicionais. Esse resultado é intuitivo, já que quando se conhece mais informação (o fato de se condicionar) os limites para os possíveis valores da variável devem ser mais estreitos.

Em segundo lugar, é interessante notar as diferenças entre as fronteiras condicionais. As FMV dos estados da natureza “superiores” e “inferiores” são mais inclinadas que as “centrais”. As dos “inferiores” são as com a inclinação maior. Você pode interpretar a inclinação dessas fronteiras como o “preço” de mercado o risco. Isto é, quanto mais inclinada é a fronteira, mais os investidores estão preocupados com o futuro e estão dispostos a “pagar” para reduzir o risco de seu *portfolio* (ou, em contrapartida, estão demandando mais para segurar um ativo mais arriscado – note que estou falando de risco sistemático). Isso sugere que os investidores estão mais preocupados com o futuro quando a economia está ou crescendo muito rápido (estados da natureza do topo) ou quando a economia está em recessão. Por um outro lado, quando a economia está crescendo a taxas “normais” (os estados da natureza centrais), a incerteza do amanhã importa menos.

#### IV.2 – Razões de Sharpe e o *Equity Premium puzzle*

Ao longo do trabalho venho mencionando o famoso artigo “The equity premium: a puzzle” (Mehra e Prescott, 1985). Agora ilustrarei seu famoso resultado: usando essa classe de modelos você não consegue encontrar um valor razoável para  $\gamma$  de maneira que se “explique” o tão maior excesso de retorno do *portfolio* médio sobre o ativo sem risco. Bastante conectado a esse, temos um segundo *puzzle*: Esses modelos prevêem retornos muitos altos para o ativo sem risco.

Uma maneira de se ilustrar essa questão é se olhar para as razões de Sharpe:

*As razões de Sharpe.*

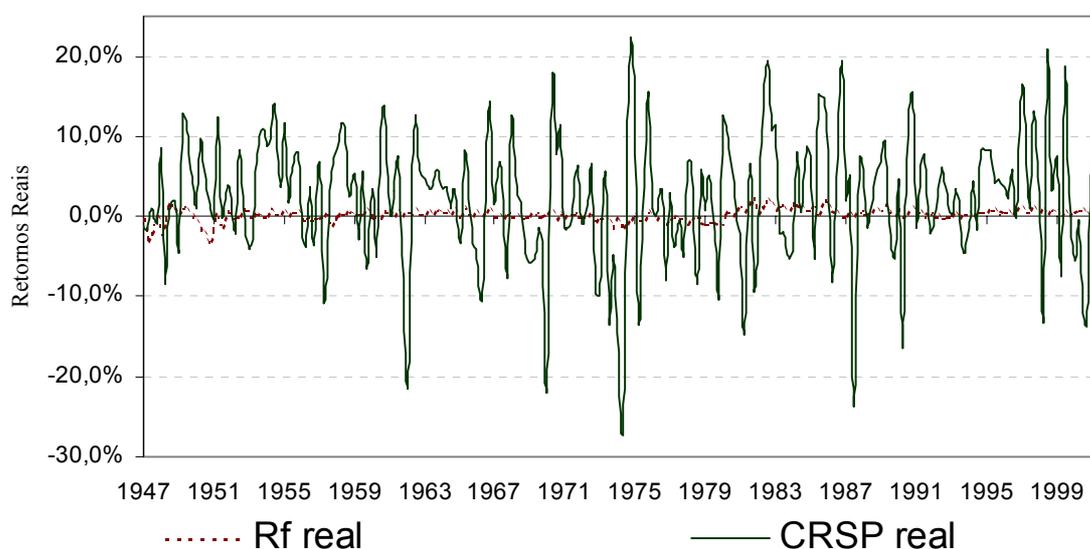
*Rearrmando a equação IV.4 chegamos a:*

$$\frac{|E(Rn_{t+1}^e/I_t)|}{\sigma(Rn_{t+1}/I_t)} \leq \frac{\sigma(m_{t+1}/I_t)}{E(m_{t+1}/I_t)}. \quad (\text{Eq IV.5})$$

Essa condição deve valer em qualquer período, para qualquer ativo, condicionalmente ou incondicionalmente: a razão entre o retorno em excesso sobre o desvio padrão do retorno de um ativo não pode exceder a inclinação da fronteira de média-variância.

Essa condição pode ser testada, dado que no lado direito da equação temos momentos de um processo estocástico que já modelamos e do lado esquerdo temos os momentos do retorno de um ativo, que podem ser razoavelmente assumidos ser estacionários, portanto sendo consistentemente estimados pelas suas contrapartidas amostrais. Mehra and Prescott se concentraram nos momentos incondicionais, o que é algo natural, dado que você obtém estimativas bastante confiáveis (você tem mais de 100 anos de dados). Além desses, eu também irei analisar os momentos condicionais, para ver como essas razões de Sharpe variam a cada estado da natureza.

Figura IV.3 - Retorno do ativo sem risco X Retorno do índice CRSP  
(Dados trimestrais reais 1947.2 - 2001.4)



O ativo cujo retorno usei para testar essa condição é uma *proxy* para o “retorno do mercado”: o índice CRSP, um índice ponderado de retorno de ações calculado na Tabela IV.1 - Fatos estilizados (dados trimestrais - condicionado aos possíveis estados)

| Estado   | Rf real | Desv. Pad. Rf | real  | CRSP   | Premio | Retorno dos títulos    |
|--|---------|---------------|-------|--------|--------|------------------------|
|  |         |               |       |        |        | (Prêmio/Desv pad Crsp) |
| Treasury bills de 03 meses. Para levarmos em conta apenas as variações reais, ambas as séries foram deflacionadas pelo índice de preços ao consumidor (CPI consumidores urbanos, todos os itens divulgado pelo Bureau of Labor Statistics), o que não é necessário quando olhamos para os retornos em excesso, mas importantes quando olhamos para cada série individualmente. | 0,03%   | 0,70%         | 1,87% | 7,46%  | 1,80%  | 24,19%                 |
| 2  | 0,07%   | 0,75%         | 1,97% | 8,11%  | 1,74%  | 19,10%                 |
| 3  | 0,13%   | 0,75%         | 1,97% | 8,11%  | 1,74%  | 19,10%                 |
| 4  | 0,31%   | 0,51%         | 1,45% | 8,04%  | 1,14%  | 14,19%                 |
| 5  | 0,11%   | 0,82%         | 2,02% | 6,02%  | 1,91%  | 31,77%                 |
| 6  | -0,30%  | 1,67%         | 0,46% | 7,50%  | 0,76%  | 10,17%                 |
| Incondicional  | 0,19%   | 0,74%         | 1,92% | 8,17%  | 1,72%  | 21,05%                 |
| Inc (anual)  | 0,11%   | 2,43%         | 8,12% | 16,33% | 7,40%  | 45,20%                 |
| Inc (mensal)   | 0,06%   | 0,32%         | 0,62% | 4,28%  | 0,56%  | 13,08%                 |

As razões de Sharpe do índice CRSP variam consideravelmente condicionado nos diferentes estados, sendo maior nos estados dos extremos (exceto no 6) do que nos centrais. Isso é consistente com os resultados que encontramos sobre a inclinação da FMV: os investidores demandam um maior retorno para um mesmo desvio padrão nos estados dos extremos. Ilustrarei isso de maneira mais clara na figura IV.4

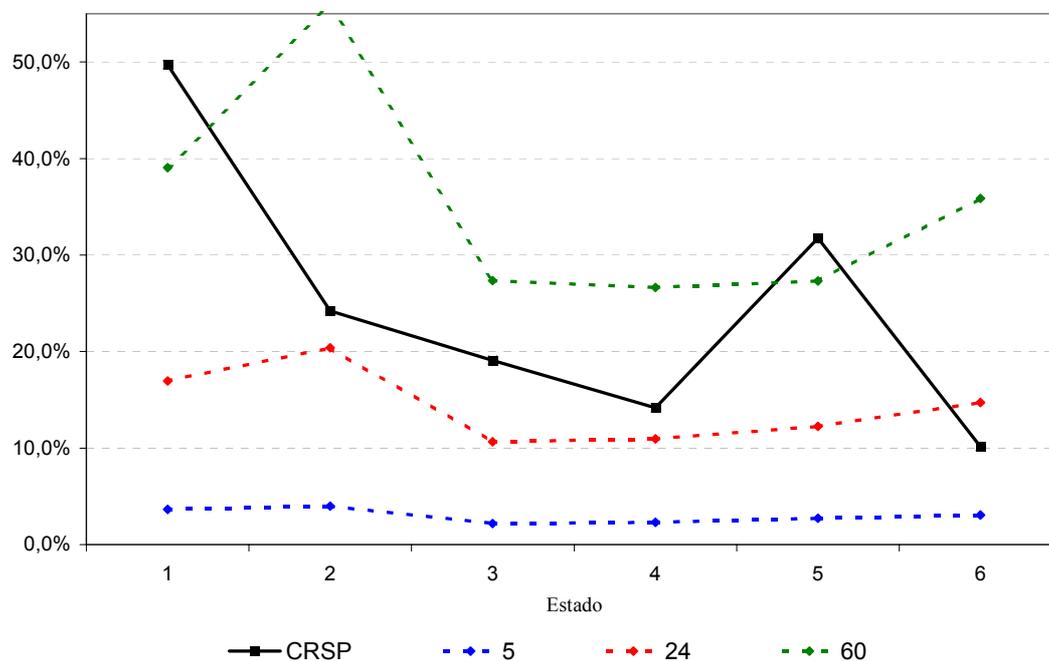
Um outro resultado interessante é o que você obtém diferentes valores para as razões de Sharpe olhando para os mesmos dados, mas em uma frequência diferente. Quanto maior a frequência você usar, menor será a razão de Sharpe, como ilustro com o caso incondicional.

Agora tratarei do lado direito da equação: a inclinação da FMV. Esta tem de ser maior que a razão de Sharpe para o índice CRSP em qualquer estado da natureza. A figura IV.4 contrasta o comportamento das razões de Sharpe verificadas para o índice CRSP com o limite previsto para diferentes valores de  $\gamma$ .

Tabela IV.2 - Inclinação das FMV (para diferentes valores de  $\gamma$  e  $\beta = 0.99$ )

| Estado        | 1     | 5     | 10    | 24            | 60     | Razão de Sharpe |
|---------------|-------|-------|-------|---------------|--------|-----------------|
| 1             | 0,73% | 3,63% | 7,22% | <b>16,96%</b> | 39,07% | <b>49,70%</b>   |
| 2             | 0,78% | 3,98% | 8,10% | <b>20,39%</b> | 55,83% | <b>24,19%</b>   |
| 3             | 0,43% | 2,18% | 4,38% | <b>10,64%</b> | 27,34% | <b>19,10%</b>   |
| 4             | 0,46% | 2,31% | 4,61% | <b>10,97%</b> | 26,63% | <b>14,19%</b>   |
| 5             | 0,55% | 2,73% | 5,36% | <b>12,24%</b> | 27,30% | <b>31,77%</b>   |
| 6             | 0,61% | 3,07% | 6,14% | <b>14,72%</b> | 35,88% | <b>10,17%</b>   |
| Incondicional | 0,90% | 4,50% | 9,10% | <b>23,00%</b> | 69,70% | <b>21,05%</b>   |

Figura IV.4 - Razões de Sharpe CRSP (condicionais) X Fronteiras previstas pelo modelo



Note que para satisfazer a equação IV.5 incondicionalmente nós precisaríamos de um valor de 24 para  $\gamma$ . Para validá-la condicionalmente em cada estado nós precisaríamos de um valor ainda maior, maior que 60. Mehra e Prescott disseram que 10 seria um valor máximo aceitável para esse parâmetro. Então, como esperado, o *puzzle* resiste. O *puzzle* advém do fato de a variância do retorno do mercado ser muito maior que a variância dos dados de consumo. Eu não esperava que esse exercício resolvesse o *puzzle*, na medida que aparentemente ele já foi resolvido: trabalhos recentes de Lustig (2000) e Constantinides (2002) mostram que se você considerar os mercados incompletos, no sentido de que os agentes são incapazes de tomar empréstimos devido à sua incapacidade de coletar sua renda futura de trabalho, isso aumenta o distúrbio em 'm' de maneira que o *puzzle* é resolvido. Essa explicação é bastante coerente e seria até bastante surpreendente se esse exercício conseguisse resolver o problema sem levar em conta esse fator adicional.

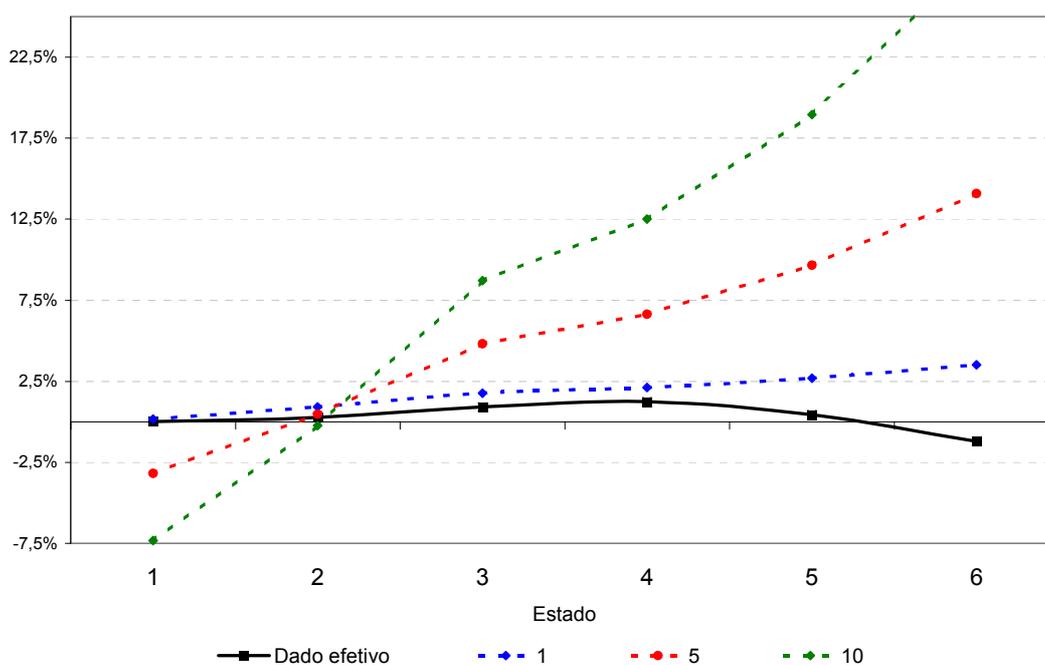
Finalmente analisarei as previsões do modelo para o retorno do ativo sem risco da economia. A tabela IV.3 e a figura IV.5 contrastam as previsões do modelo com o

comportamento verificado desse retorno, condicionado ao crescimento do consumo no período passado.

Tabela IV.3 – Retorno do Ativo sem risco (para diferentes valores de  $\gamma$  e  $\beta = 0.99$ )

| Estado        | 1            | 5      | 10     | 24      | 60      | Rf verificado |
|---------------|--------------|--------|--------|---------|---------|---------------|
| 1             | <b>0,20%</b> | -3,20% | -7,30% | -18,60% | -44,10% | <b>0,01%</b>  |
| 2             | <b>0,90%</b> | 0,50%  | -0,20% | -3,00%  | -15,60% | <b>0,07%</b>  |
| 3             | <b>1,80%</b> | 4,80%  | 8,70%  | 20,10%  | 52,50%  | <b>0,23%</b>  |
| 4             | <b>2,10%</b> | 6,60%  | 12,50% | 30,40%  | 87,00%  | <b>0,31%</b>  |
| 5             | <b>2,70%</b> | 9,70%  | 19,00% | 48,90%  | 159,20% | <b>0,11%</b>  |
| 6             | <b>3,50%</b> | 14,10% | 28,70% | 79,50%  | 308,90% | <b>-0,30%</b> |
| incondicional | <b>1,90%</b> | 5,50%  | 10,10% | 22,40%  | 47,90%  | <b>0,19%</b>  |

Figura IV.5 - Rf verificado X Rf predito pelo modelo (condicional)



Primeiramente, em termos de nível, um valor bastante pequeno para  $\gamma$  parece ser apropriado. Um valor de 1 ainda fornece estimativas maiores que as verificadas, apesar de não errar tanto. As discussões acerca do valor desse parâmetro apontam para algo em torno de 1, o que indica que esse modelo é melhor para explicar o comportamento do ativo sem risco da economia do que o retorno em excesso do *portfolio* de mercado. Os altos valores

para  $\gamma$  sugeridos pela figura IV.4 resultariam em um comportamento patológico para o ativo sem risco como se vê na tabela IV.3.

Agora, em termos dos movimentos do retorno do ativo sem risco em relação a variações no consumo, vemos pela figura IV.5 que o modelo segue corretamente o comportamento se o consumo está crescendo nos estados de 1 até 4, mas não prevê os valores menores para o retorno quando a economia está crescendo a grandes taxas (5 e 6).

## V - CONCLUSÕES

O modelo utilizado durante toda a análise é um modelo que utiliza o consumo como o fator de desconto estocástico. A calibragem forneceu uma estilização do processo que rege o crescimento do consumo, de maneira que obtemos um processo fácil de ser tratado analiticamente e ao mesmo tempo é relacionado a dados da economia real. Com isso podemos olhar para a média e variância de ativos condicionalmente ao crescimento do consumo de maneira bastante explícita.

Um resultado intuitivo que obtivemos foi que ao olharmos para as fronteiras de média variância condicionalmente ao crescimento do consumo, vemos que o “preço do risco” (quanto os investidores cobram para aceitar uma dada quantidade de risco) é maior quando a economia está em recessão ou crescendo em taxas muito elevadas.

Finalmente, como se era previsto, a tentativa de se alterar a estrutura probabilística da economia se estendendo a cadeia de Markov não soluciona o *puzzle* introduzido por Mehra e Prescott. Ou seja, tanto condicionalmente, quanto incondicionalmente, precisamos utilizar valores muito altos para o parâmetro  $\gamma$  de maneira que se obedeça a condição imposta pelas razões de Sharpe. Em relação ao comportamento do ativo sem risco da economia, o modelo prevê um valor em torno de 1 para  $\gamma$ , o que é um valor coerente com os resultados da literatura de microeconomia. Portanto as simulações feitas na dada especificação levam a concluir que este tipo de modelo é mais apropriado para explicar o comportamento do retorno do ativo sem risco da economia do que a relação entre média e variância de retornos.

## BIBLIOGRAFIA

**Arrow, Kenneth J.**, 1953, "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing", *Econometrica*.

**Campbell, John Y.**, 2000, "Asset pricing at the millennium", *Journal of Finance* 55, pp 1515-1567.

**Cochrane, John H.**, 2001, *Asset Pricing*, (Princeton University Press, Princeton, NJ).

**Constantinides, George M.**, 2002, "Rational asset prices", *Journal of Finance* 57, pp.1567-1591.

**Constantinides, George M., John B. Donaldson, e Rajnish Mehra**, 2002, "Junior can't borrow: A new perspective on the equity premium puzzle", *Quarterly Journal of Economics* 117, pp. 269–296.

**Ellickson, Bryan**, a ser publicado, Finance.

**Hansen, Lars P.**, "Large sample properties of generalized method of moments estimators", *Econometrica* 50, pp.1029-1054.

**Hansen, Lars P. e James J. Heckman**, 1996, "The Empirical Foundations of Calibration", *Journal of Economic Perspectives* 10 no.1, pp. 87-104.

**Hansen, Lars P. e Scott F. Richard**, 1985, "The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models", *NORC Program in Quantitative Economic Analysis Discussion Paper*, pp. 85-113.

**Lucas, Robert E.**, 1978, "Asset pricing in an exchange economy", *Econometrica* 46, pp 1429-1945.

**Lustig, Hanno.**, "Secured Lending and Asset Prices", Mimeo Stanford University.

**Mehra, Rajnish e Edward C. Prescott**, 1985, “The equity premium: a puzzle”, *Journal of Monetary Economics* 15, pp. 145–161.

**Mehra, Rajnish e Edward C. Prescott**, 1988, “The equity premium: a solution”, *Journal of Monetary Economics* 22, pp. 133-136.

**Mehra, Rajnish**, 2002, “Finance 2001”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26 6/7, pp. 1069 - 1074.

**Rietz, Thomas A.**, 1988, “The equity premium: a solution”, *Journal of Monetary Economics* 21, pp. 117-132.

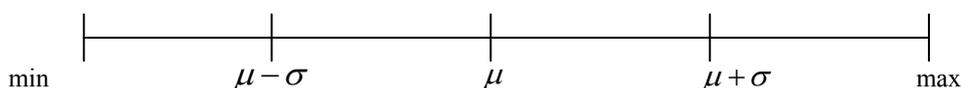
## APÊNDICE A : DISCRETIZAÇÃO DE $\ln(g_t)$

Como disse anteriormente utilizei 2 métodos para discretizar essa variável:

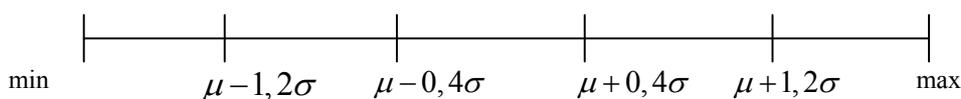
Método 1 : pega o valor máximo da variável e o mínimo e divide esse intervalo em subintervalos de tamanho igual (de acordo com o número de estados que você quiser). O valor da variável em cada estado é a média dos valores de cada subintervalo.

Método 2 : Divide as observações de acordo com número (arbitrário) de desvios padrão em relação à média.

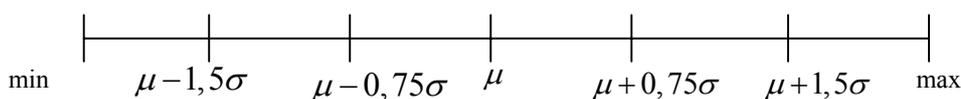
*Modelo com 4 estados*



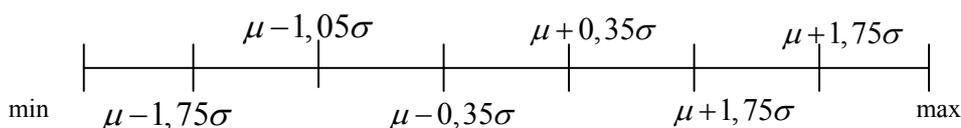
*Modelo com 5 estados*



*Modelo com 6 estados*



*Modelo com 7 estados*



A escolha da distribuição discreta leva em conta a riqueza adicional em se utilizar mais estados da natureza, a presença de um número “razoável” de observações em cada estado e o número de violações da hipótese *birth and death* da cadeia de Markov ( $\ln(g_t)$  varia mais do que um estado de  $t$  para  $t+1$ ).

Como mostram as tabelas A.1.1 e A.1.2, o método 1 proporciona menos violações da hipótese, mas em contrapartida tem muito poucas observações nos estados extremos. Ponderando esses critérios citados acima, escolhi a distribuição advinda do método 2 com 6 estados da natureza.

Tabela A.1 – freqüências de cada estado da variável  $\ln(g_t)$  discreta

## Método 1 : divisão em intervalos uniformes

| 4 estados |            | 5 estados |            | 6 estados |            | 7 estados |            |
|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|
| Estado    | Frequência | Estado    | Frequência | Estado    | Frequência | Estado    | Frequência |
| -2,23%    | 2,28%      | -2,45%    | 1,83%      | -2,71%    | 1,37%      | -2,71%    | 1,37%      |
| 0,46%     | 54,34%     | -0,21%    | 11,87%     | -0,88%    | 3,65%      | -1,10%    | 2,28%      |
| 1,51%     | 42,47%     | 0,94%     | 75,80%     | 0,52%     | 51,60%     | 0,14%     | 21,46%     |
| 4,23%     | 0,91%      | 2,05%     | 9,59%      | 1,49%     | 42,01%     | 0,98%     | 57,99%     |
|           |            | 4,23%     | 0,91%      | 3,13%     | 0,91%      | 1,87%     | 15,53%     |
|           |            |           |            | 4,99%     | 0,46%      | 3,13%     | 0,91%      |
|           |            |           |            |           |            | 4,99%     | 0,46%      |

## Método 2 : divisão com desvios padrões em relação à media

| 4 estados |            | 5 estados |            | 6 estados |            | 7 estados |            |
|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|
| Estado    | Frequência | Estado    | Frequência | Estado    | Frequência | Estado    | Frequência |
| -0,87%    | 8,68%      | -1,08%    | 6,85%      | -1,48%    | 4,57%      | -1,59%    | 4,11%      |
| 0,50%     | 40,64%     | 0,28%     | 23,74%     | 0,00%     | 10,05%     | -0,22%    | 4,57%      |
| 1,26%     | 39,27%     | 0,89%     | 37,90%     | 0,57%     | 34,70%     | 0,33%     | 22,83%     |
| 2,20%     | 11,42%     | 1,54%     | 25,11%     | 1,18%     | 31,96%     | 0,87%     | 34,25%     |
|           |            | 2,49%     | 6,39%      | 1,79%     | 15,98%     | 1,44%     | 23,74%     |
|           |            |           |            | 3,02%     | 2,74%      | 2,01%     | 9,13%      |
|           |            |           |            |           |            | 3,75%     | 1,37%      |

## Tabela A.2 - violações da hipótese "Birth and death"

## Método 1

|           | 4 States | 5 States | 6 States | 7 States |
|-----------|----------|----------|----------|----------|
| 2state    | 5        | 9        | 4        | 17       |
| 3 state   | 1        | 2        | 4        | 2        |
| 4 or more | 0        | 1        | 1        | 3        |
| Total     | 6        | 12       | 9        | 22       |
| Total(%)  | 2.75%    | 5.50%    | 4.13%    | 10.09%   |

## Método 2

|           | 4 States | 5 States | 6 States | 7 States |
|-----------|----------|----------|----------|----------|
| 2state    | 19       | 40       | 44       | 44       |
| 3 state   | 5        | 7        | 10       | 17       |
| 4 or more | 0        | 3        | 3        | 6        |
| Total     | 24       | 50       | 57       | 67       |
| Total(%)  | 11.01%   | 22.94%   | 26.15%   | 30.73%   |

## APÊNDICE B : ESTIMAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO DA CADEIA DE MARKOV PELO MÉTODO GMM

Deseja-se estimar os 10 (a soma de cada linha é igual a 1) parâmetros da matriz abaixo pelo método GMM.

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{p}_1 & & & & \\ \mathbf{q}_2 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{0} & & \\ & & \dots & & & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{q}_5 & \mathbf{r}_5 & \mathbf{p}_5 & \\ & & & \mathbf{q}_6 & \mathbf{r}_6 & \end{pmatrix}_{6 \times 6}$$

Para isso precisamos de pelo menos 10 momentos implicados pela distribuição assumida e de uma matriz de pesos  $W$ .

Eu utilizei os 12 momentos abaixo na estimação:

### Momento teórico

### Contrapartida amostral

1 até 4, probabilidades condicionais.

- |    |  |                          |
|----|--|--------------------------|
| 1) | $\Pr(\ln(g_{t+1}) = S3 / \ln(g_t) = S3) - r_3$ | $\frac{\sum I_{3/3}}{n}$ |
| 2) | $\Pr(\ln(g_{t+1}) = S4 / \ln(g_t) = S4) - r_4$ | $\frac{\sum I_{4/4}}{n}$ |
| 3) | $\Pr(\ln(g_{t+1}) = S3 / \ln(g_t) = S4) - q_4$ | $\frac{\sum I_{3/4}}{n}$ |
| 4) | $\Pr(\ln(g_{t+1}) = S4 / \ln(g_t) = S5) - q_5$ | $\frac{\sum I_{4/5}}{n}$ |

5 até 9, probabilidades incondicionais.

$$5) \quad \pi_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(1) \quad \frac{\sum I_1}{n}$$

$$6) \quad \pi_2 - \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(2) \quad \frac{\sum I_2}{n}$$

$$7) \quad \pi_4 - \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(4) \quad \frac{\sum I_4}{n}$$

$$8) \quad \pi_5 - \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(5) \quad \frac{\sum I_5}{n}$$

$$9) \quad \pi_6 - \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(6) \quad \frac{\sum I_6}{n}$$

10 até 12, média, variância e autocorrelação de 1ª ordem.

$$10) \quad \mu - \sum_{i=1}^6 \pi_i \cdot Si \quad \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$11) \quad \sigma^2 - \sum_{i=1}^6 \pi_i \cdot (Si - \mu)^2 \quad \frac{\sum_{i=1}^n \left( X_i - \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} \right)^2}{n}$$

$$12) \quad \sigma_{t,t-1} - \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 P_{i,j} \cdot (Si_{t-1} - \mu)(Sj_t - \mu) \quad \frac{\sum_{i=1}^n \left( X_i - \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} \right) \cdot \left( X_{i-1} - \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} \right)}{n}$$

Onde  $I_k$  é uma função indicadora (1 no estado indicado, 0 no resto) e  $I_{k|j}$  função indicadora condicionada ao estado anterior.

Finalmente utilizo uma matriz identidade como a matriz de pesos W. Isso significa que estou dando pesos iguais para todos os momentos utilizados, o que não é a forma mais eficiente de se estimar, mas não compromete a consistência.