

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

EQUILÍBRIO GERAL E INADIMPLÊNCIA

Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realizá-lo, a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quanto autorizado pelo professor tutor.

---

Pedro James Frias Hemsley

Matrícula No.0014605

Orientador: Juan Pablo Torres-Martínez

Dezembro de 2003

As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor.

## Índice

Introdução .....	4
Capítulo I - Equilíbrio e Distribuição de Risco com Mercados Completos .....	6
Capítulo II - Equilíbrio e Distribuição de Risco com Mercados Incompletos .....	10
2.1) Equilíbrio de Radner .....	10
2.2) Mercados Incompletos, Equilíbrio de Radner e Equilíbrio de Arrow-Debreu .....	12
Capítulo III - Comparação dos resultados .....	15
Capítulo IV - Colateral e Inadimplência.....	18
4.1) Equilíbrio com Colateral .....	18
4.2) Comparação com outros equilíbrios.....	21
4.2.1) Caso em que todos os ativos estão disponíveis .....	21
4.2.2) Caso em que nenhum ativo está disponível .....	22
4.2.3) Equilíbrio com Mercados Incompletos .....	22
4.3) Propriedades do Equilíbrio com Colateral .....	23
4.4) Uma Ressalva .....	23
4.5) Outra Ressalva .....	24
Capítulo V - Penalidades e Inadimplência .....	25
5.1) O Modelo .....	25
5.2) Resultados do modelo .....	27
Capítulo VI - Colateral e Penalidade.....	30
Conclusão .....	33
Bibliografia.....	34

## Introdução

O objetivo desta monografia é analisar os efeitos sobre a Teoria do Equilíbrio Geral do abandono de umas das hipóteses centrais dessa teoria: a existência de mercados completos. Em particular, tentaremos avaliar os efeitos da indisponibilidade de determinados contratos sobre a distribuição de risco referente aos diferentes estados da natureza possíveis quando os mercados são contingentes.

Sob uma série de hipóteses, o Modelo de Equilíbrio Geral determina um resultado eficiente de Pareto. Isso significa que, respeitadas essas hipóteses, a alocação de equilíbrio competitivo esgota todos os possíveis ganhos de troca. Quando há incerteza envolvida (i.e., os mercados são contingentes), a alocação de equilíbrio ser eficiente significa ainda que a distribuição de risco entre os agentes, dados os possíveis estados da natureza, é eficiente. Esse resultado, conhecido como equilíbrio de Arrow-Debreu, é o ponto de partida para a tentativa de se compreender o que ocorre quando alguma das hipóteses é abandonada. Sabemos, ainda, que o equilíbrio competitivo, como toda alocação eficiente de Pareto, maximiza alguma função de bem-estar social. Logo, a eficiência da alocação de equilíbrio é uma preocupação básica da teoria econômica.

Uma das hipóteses necessárias para que o Modelo de Equilíbrio Geral seja sempre eficiente é que os mercados sejam completos, i.e., todo e qualquer contrato que os agentes gostariam de assinar para obter algum ganho de troca está disponível. Quando essa hipótese deixa de valer, provavelmente (mas nem sempre) a alocação de equilíbrio resultante deixa de ser eficiente de Pareto. Cabe, então, tentar descrever essa nova alocação, e analisar mecanismos que possam minimizar essa perda de eficiência.

Na segunda seção da monografia, apresenta-se o modelo de equilíbrio geral clássico (mercados completos) na presença de incerteza. Mostra-se que a alocação de equilíbrio é eficiente e que, portanto, os agentes distribuem risco de maneira ótima. É a descrição do 'melhor dos mundos.'

Na terceira seção, é descrito o modelo de Equilíbrio Geral com Mercados Incompletos. Vamos descrever a alocação de equilíbrio e tentar fazer considerações sobre a (provável) perda de eficiência resultante da indisponibilidade de contratos. Deve-se, portanto, observar alguma diminuição do bem-estar.

Na quarta seção, vamos comparar os resultados obtidos nas duas seções anteriores. Tentaremos, então, apresentar alguma explicação para a diferença entre os dois resultados e descrever alguns mecanismos possíveis que podem ser usados quando os mercados são incompletos. Vamos, então, discutir a relação que existe entre inadimplência e eficiência.

Na quinta seção, vamos incluir na análise da determinação do equilíbrio com mercados incompletos a possibilidade de uso de colateral para lidar com inadimplência.

Na sexta seção, vamos incluir na análise da determinação do equilíbrio com mercados incompletos a possibilidade de penalidades brandas (positivas, mas não infinitas) para lidar com inadimplência.

Na sétima seção, faremos algumas observações adicionais sobre o equilíbrio com inadimplência, comuns tanto no equilíbrio com colateral quanto no equilíbrio com penalidades.

A oitava seção resumirá as conclusões do trabalho.

Tentaremos, nesta monografia, descrever alguns modelos básicos e apresentar seus resultados a respeito de eficiência e distribuição de risco. Em particular, tentaremos descrever como a economia se comporta quando os mercados são incompletos, e como os mecanismos referidos acima (colateral e penalidades) afetam esse comportamento. Pretende-se, em resumo, apresentar um texto que ajude a compreender o comportamento da economia na ausência da hipótese de mercados completos.

## Capítulo I - Equilíbrio e Distribuição de Risco com Mercados Completos

Nesta seção, vamos descrever o modelo que servirá como *benchmark* para o que será apresentado na monografia. Para tanto, faremos a suposição de que a distribuição de renda entre os diferentes estados da natureza pode ser feita através do uso de um número ilimitado de contratos. O modelo é simplesmente a extensão do equilíbrio geral walrasiano pela inclusão de incerteza, como feito por K. Arrow (1953) e G. Debreu (1959). A alocação resultante, seguindo a tradição, será sempre referida como equilíbrio de Arrow-Debreu.

Intuitivamente, podemos descrever o mecanismo que leva à optimalidade como se segue. Quando os mercados são contingentes, a dotação que um agente obtém em determinado estado da natureza pode não ser a que ele deseja. Esse agente, então, desejará transferir renda desse estado da natureza para algum outro estado em que queira aumentar sua renda, ou desejará transferir renda a partir de algum estado em que tenha renda acima do desejado. A maneira como essa transferência é efetuada é através da assinatura de um contrato em que, dependendo do estado da natureza que de fato ocorra, o agente se comprometa a efetuar um pagamento, ou tem o direito de receber um pagamento. Obviamente, existe um número infinito de possíveis estados da natureza; logo, para efetuar todas as transferências de renda desejadas entre os infinitos estados, pode ser necessário um número ilimitado de contratos. Como o modelo pressupõe que todos os contratos desejados estão disponíveis, o agente poderá fazer todas as transferências desejadas, até que esgote todas as possibilidades de aumento de utilidade esperada. Formalmente, a existência de mercados completos é caracterizada quando o número de obrigações (ou contratos) linearmente independentes é igual ao número de estados da natureza existente (como será visto mais adiante, interpretar contratos como vetores não é apenas uma questão de nomenclatura). Isso significa que o conjunto orçamentário do agente engloba todas as possibilidades de realocação de renda entre diferentes estados que ele possa querer.

É importante ressaltar que essa definição formal depende da existência de mercados financeiros, ou, mais especificamente, daquilo que é conhecido na literatura como “obrigação de Arrow.” Suponha que existam  $L$  diferentes bens em cada estado da natureza;  $S$  diferentes estados da natureza em cada período; e  $T$  diferentes períodos. Logo, para que toda transação ocorra, precisaríamos de  $(LST)$  contratos disponíveis, pois cada contrato deveria especificar o

bem, o estado da natureza e o período em que a transação ocorre (um contrato de compra e venda típico nesse mundo seria “compra de um livro em 10 de dezembro de 2003, caso faça sol”). Logo, os mercados só seriam completos quando houvesse (*LST*) contratos disponíveis, e todas as transações se dariam no primeiro período da economia. Arrow notou que essa condição não é necessária para a completude dos mercados; na verdade, basta se disponibilizar  $S$  contratos contingentes garantindo o pagamento em um bem numerário para que os agentes possam realizar exatamente as mesmas transações. Ao invés de especificar o período, o estado da natureza e o bem, o contrato precisa especificar apenas a quantia que será paga (e poderá ser utilizada na compra de qualquer bem) em determinado período cada ocorra determinado estado da natureza – operação que é realizada através de mercados financeiros, retornando ao mecanismo descrito no parágrafo anterior. Formalmente, pode-se dizer que não é necessário que haja um conjunto de vetores (contratos) alcançando cada ponto do espaço vetorial da restrição contingente do consumidor; basta que exista um conjunto de vetores capaz de gerar todo esse espaço vetorial. Essa interpretação, porém, tem uma importante implicação sobre o número de alocações de equilíbrio que devem ser determinadas separadamente, como será visto na próxima seção.

Estaremos supondo, nessa seção e na próxima, que todos os contratos assinados têm de ser cumpridos: não há possibilidade de quebra de contrato, ou inadimplência. Pode-se garantir isso supondo que a punição à inadimplência é infinita.

O pressuposto de que todos os contratos estejam disponíveis não é necessário para se alcançar o ótimo de Pareto (por exemplo, a alocação inicial pode já ser ótima), mas, quando é válido, garante que o ótimo seja atingido (supondo-se que vigorem ainda as outras hipóteses do modelo clássico de equilíbrio geral, às quais não faremos referência neste trabalho, assumindo que sejam válidas).

Os agentes nessa economia são descritos a partir de suas funções-utilidade esperadas e de suas dotações contingentes. Supondo que as funções utilidade são independentes do estado da natureza que se realiza, podemos descrever o problema do agente como:

$$\text{Max } U = \sum_s \pi_s u(x_s), \text{ sujeito a } \sum_s p_s x_s \leq \sum_s p_s e_s,$$

Onde  $\pi_s$  é a probabilidade associada ao estado  $s$ ,  $e_s$  é a dotação inicial do agente no estado  $s$  (um vetor de bens),  $p_s$  é o vetor de preços de equilíbrio no estado  $s$  e  $x_s$  é o vetor de

bens consumidos pelo agente nesse estado. Uma condição necessária para o agente otimizar é:

$$\pi_s \partial U / \partial (x_s^i) / p_s^i = \pi_{s'} \partial U / \partial (x_{s'}^i) / p_{s'}^i ,$$

para todo agente  $i$ , para quaisquer estados  $s, s'$ . Ou seja, a utilidade marginal do consumo (ponderada pela probabilidade de ocorrência de cada estado) deve ser a mesma em todos os estados. Essa condição é conhecida como Teorema Fundamental da Distribuição de Risco. Tal nome se aplica porque, quando a condição é válida, podemos dizer que o agente está fazendo a escolha ótima em relação ao risco (i.e., em relação à probabilidade associada a cada estado da natureza).

Vale dizer que esse equilíbrio comporta probabilidades subjetivas, i.e., diferentes agentes podem associar diferentes probabilidades a um mesmo estado da natureza.

O equilíbrio de Arrow-Debreu ocorre quando a condição acima vale para todos os agentes sob suas restrições orçamentárias e os mercados de todos os bens se equilibram (i.e., as restrições orçamentárias agregadas são respeitadas). Para facilitar a notação, descreveremos as duas condições do equilíbrio de Arrow-Debreu para dois agentes, A e B, e dois bens, 1 e 2:

1) Maximização individual

$$1.1) (x_1^A, x_2^A) \in \operatorname{argmax} \pi_1^A u^A(x_1) + \pi_2^A u^A(x_2) , \text{ sujeito a } p_1 x_1^A + p_2 x_2^A \leq p_1 e_1 + p_2 e_2^A$$

$$1.2) (x_1^B, x_2^B) \in \operatorname{argmax} \pi_1^B u^B(x_1) + \pi_2^B u^B(x_2) , \text{ sujeito a } p_1 x_1^B + p_2 x_2^B \leq p_1 e_1 + p_2 e_2^B$$

2) Equilíbrio entre oferta e demanda

$$2.1) x_1^A + x_1^B = e_1^A + e_1^B$$

$$2.2) x_2^A + x_2^B = e_2^A + e_2^B$$

Ao montar o problema de otimização do consumidor (o lagrangeano a partir da função utilidade determinada acima e as dotações), chega-se, para cada agente, às seguintes condições de primeira ordem (seja  $\lambda^i$  o multiplicador de Lagrange para  $i = A, B$ ):

$$\partial L / \partial x_1 = \pi_1^i \partial u^i / \partial (x_1) - \lambda^i p_1 = 0$$

$$\partial L / \partial x_2 = \pi_2^i \partial u^i / \partial (x_2) - \lambda^i p_2 = 0,$$

para  $i = A, B$ .

Resolvendo o problema, chega-se ao resultado tradicional:

$$\pi_1^A \partial u^A / \partial (x_1) / \pi_2^A \partial u^A / \partial (x_2) = \pi_1^B \partial u^B / \partial (x_1) / \pi_2^B \partial u^B / \partial (x_1) = p_1 / p_2$$

No caso de probabilidades não-subjetivas (i.e.,  $\pi_s^i = \pi_s^j, \forall i, j$ ), o resultado se resume a:

$$\partial u^A / \partial(x_1) / \partial u^A / \partial(x_2) = \partial u^B / \partial(x_1) / \partial u^B / \partial(x_1) = p_1 / p_2$$

Em qualquer hipótese, trata-se de um resultado eficiente: as curvas de indiferença se tangenciam tanto para probabilidades subjetivas, quanto para probabilidades não-subjetivas.

Esse resultado, porém, não esgota todas as possibilidades de equilíbrio. Não trataremos de outros casos, mas pode-se afirmar que o equilíbrio competitivo é ótimo de Pareto independente da incerteza ser agregada (quanto ao total de bens que estará disponível na economia) ou apenas distributiva (dado o total de bens na economia, qual parcela caberá a cada agente). O resultado foi apresentado, a título de ilustração, para apenas dois bens e dois agentes; obviamente, continua verdadeiro para qualquer número de agentes e de bens.

## Capítulo II - Equilíbrio e Distribuição de Risco com Mercados Incompletos

Nesta seção, faremos o contraponto ao equilíbrio descrito na seção anterior. Mercados contingentes incompletos são caracterizados por um número de obrigações linearmente independentes disponíveis inferior ao número de estados da natureza existentes. Para compreender a definição de maneira precisa, alguns conceitos preliminares devem ser delineados.

### 2.1) Equilíbrio de Radner

Como foi mencionado na seção anterior, o fato de que não são necessários (*LST*) contratos na economia tem uma implicação importante sobre o funcionamento dos mercados. Caso houvesse esse número de mercados, todas as transações ocorreriam no primeiro período: todos os pagamentos e recebimentos, em cada estado da natureza e em cada período, seriam determinados no primeiro período. Em outras palavras: os mercados só precisariam funcionar no primeiro período; em todos os outros, bastaria que existisse alguma instituição capaz de garantir o cumprimento dos contratos – não haverá mais transações. Quando essa infinidade de contratos é substituída por  $S$  obrigações de Arrow, porém, as transações não se limitam ao primeiro período da economia: a cada período, haverá a troca de obrigações pelo bem numérico (transação determinada no primeiro período) e, então, uma nova transação: a troca do bem numérico por algum outro bem. A necessidade de que os mercados de bens estejam abertos em cada período leva à definição de uma “economia seqüencial”, no qual os múltiplos equilíbrios devem ser determinados a cada período. Ou seja, não estamos mais falando de um equilíbrio, mas de um vetor de alocações de equilíbrio. Há várias definições para equilíbrio seqüencial, dependendo da hipótese que se faça sobre as expectativas dos agentes. Aqui, trabalharemos com o equilíbrio de Radner.

O equilíbrio de Radner determina um conjunto de planos de consumo dos agentes, de preços e de expectativas de preços na alocação resultante. Os mercados estão abertos e devem se equilibrar a cada período, mas o equilíbrio não pode gerar preços não-antecipados pelos agentes. A importância fundamental desse equilíbrio reside no fato de que, quando valem as condições do equilíbrio de Arrow-Debreu, o equilíbrio de Radner replica tal equilíbrio; os

planos de consumo são feitos como no mundo de Arrow-Debreu. As transações que ocorrem no futuro na economia de Radner podem ser interpretadas como a analogia seqüencial do cumprimento dos contratos estabelecidos no primeiro período da economia de Arrow-Debreu. Em outras palavras, o equilíbrio de Radner é isomórfico ao equilíbrio de Arrow-Debreu. A alocação determinada no equilíbrio de Radner é idêntica àquela caracterizada na seção anterior.

O equilíbrio de Radner pode ser descrito da seguinte maneira: os agentes formam expectativas sobre os preços nos possíveis estados da natureza, e compram bens e obrigações no presente com base nessas expectativas. Os preços presentes e futuros de bens e ativos se ajustam até que todos os mercados se equilibrem e as expectativas de preços sejam respeitadas. A hipótese para que esse resultado seja alcançado é a possibilidade de previsão perfeita por parte dos agentes: eles não sabem que estado da natureza vai ocorrer, mas sabem os preços que vão vigorar caso um determinado estado da natureza ocorra. Não é necessário que as probabilidades que diferentes agentes associam a um mesmo estado sejam iguais. É interessante notar que essa mesma hipótese é necessária para o equilíbrio com expectativas racionais de Lucas.

Formalmente, o equilíbrio de Radner é definido a partir de três condições:

- i) todos os agentes maximizam;
- ii) os mercados de ativos se equilibram;
- iii) os mercados de bens se equilibram *a cada período*.

A terceira condição diferencia o equilíbrio de Radner do equilíbrio de Arrow-Debreu: nesse último, o equilíbrio no mercado de bens era determinado no primeiro período.

Vale dizer que, quando se faz a hipótese de número de obrigações linearmente independentes igual ao número de estados possíveis da natureza, a maximização individual no modelo de Radner se resume ao problema do agente individual no modelo de Arrow-Debreu.

É possível demonstrar a equivalência entre os equilíbrios de Radner e de Arrow-Debreu. Não faremos qualquer demonstração formal, mas tentaremos descrever o mecanismo que conecta os dois equilíbrios. Primeiro, é necessário apresentar o resultado conhecido como Teorema Fundamental da Precificação de Ativos: a cada equilíbrio de Radner, corresponde um vetor de preços de ativos (determinados pela condição de não-arbitragem). A existência

desse vetor, por sua vez, implica a existência de um vetor de multiplicadores de Lagrange não-negativos, no qual cada multiplicador representa o valor marginal do estado  $s$  em equilíbrio. O produto do multiplicador de cada estado da natureza pelo seu preço de equilíbrio de Radner é o conjunto de vetores de preços contingentes do modelo de Arrow-Debreu.

Devemos fazer referência, mesmo sem maior aprofundamento, a um revés do equilíbrio de Radner. Como apontado por Olivier Hart, o fato de o retorno de um determinado ativo em diferentes estados da natureza depender dos preços de equilíbrio nos diferentes estados pode gerar dificuldade para se garantir a existência do equilíbrio. Tal fato, descrito como Problema da Existência de Hart, resulta da possibilidade da existência de descontinuidades nas funções demanda, o que pode impedir a determinação do equilíbrio. Há algumas respostas possíveis para esse problema; seguindo Magill e Shafer (1990), diremos simplesmente que os casos apresentados por Hart em que não existe equilíbrio são exemplos patológicos, e não o caso típico.

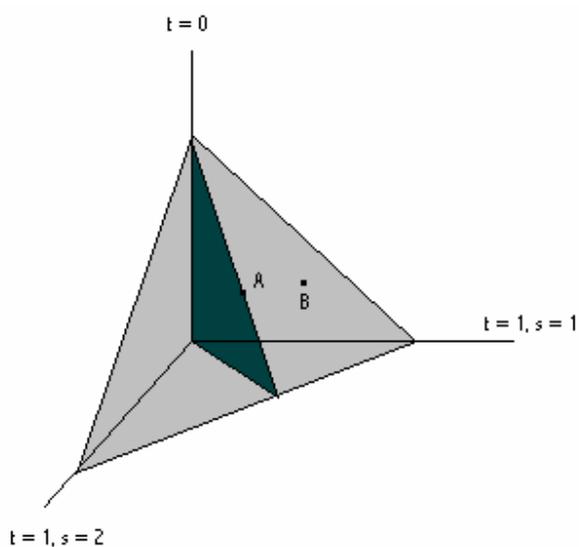
## 2.2) Mercados Incompletos, Equilíbrio de Radner e Equilíbrio de Arrow-Debreu

Agora, podemos caracterizar mercados incompletos mais precisamente. Os mercados são incompletos quando, em uma economia seqüencial, o número de obrigações linearmente independentes é estritamente menor do que o número de possíveis estados da natureza. Assim, nem todas as transferências de renda entre diferentes estados da natureza podem acontecer. Trata-se, como veremos, de uma restrição sobre o conjunto orçamentário dos agentes. Ainda pode ser possível determinar um equilíbrio que respeite as condições de Radner, mas esse equilíbrio não será mais isomórfico ao equilíbrio de Arrow-Debreu.

Obviamente, é possível que a escolha ótima de um agente não dependa dos contratos que deixam de existir, donde o equilíbrio com mercados incompletos pode não representar uma perda de utilidade para o agente; mas esse é um caso particular, e não o resultado geral.

Para tornar mais clara a restrição causada pela incompletude dos mercados, vamos recorrer à geometria. Suponha que haja três estados em que o consumidor precisa especificar um plano de consumo: o presente ( $t=0$ ) e o futuro, dividido nas possibilidades ( $t=1, s=1$ ) e ( $t=1, s=2$ ). Com mercados completos, a restrição orçamentária contingente de cada agente é

representada pela pirâmide cinza na figura abaixo: como há dois contratos contingentes linearmente independentes, qualquer ponto nesse espaço pode ser gerado (por definição, o consumidor pode fazer sua escolha no presente sem a necessidade de qualquer contrato contingente). Quando, porém, os mercados são incompletos, o agente perde um dos vetores de que dispunha, e fica limitado a um subespaço vetorial do conjunto orçamentário original, representado pela área escura. Apesar de ainda poder maximizar sua utilidade, nada garante que o consumidor poderá alcançar o mesmo nível de utilidade possível no conjunto orçamentário completo.



O ponto A na figura acima representa o caso particular referido anteriormente: como a maximização do agente se dava em um ponto dentro da restrição ao conjunto orçamentário, não haverá perda de utilidade (o agente não usava os contratos que deixam de existir); o caso típico, porém, é o ponto B: o ponto ótimo do agente deixa de estar disponível. Por preferência revelada, sabemos que, se o agente escolheu B quando todos os pontos (i.e., distribuições de risco) do subespaço que contém A estavam disponíveis, isso significa que o consumidor prefere o consumo contingente B a qualquer ponto na restrição, donde a limitação do número de contratos reduz sua utilidade.

A ineficiência, portanto, é um resultado esperado (ainda que não necessário) da ausência de mercados. O fato de ser provavelmente ineficiente não significa que o equilíbrio não exista: como foi dito, pode existir um equilíbrio de Radner, ainda que provavelmente não equivalente a um equilíbrio de Arrow-Debreu. O problema da existência, porém, não será tratado nesse trabalho; como referência, ver Monteiro (1991).

Para fechar essa seção, destacamos o significado da ineficiência quando os mercados são contingentes: os agentes não conseguem distribuir risco da maneira desejada. Uma decisão de consumo entre no espaço vetorial ilustrado acima significa que o agente decide uma determinada distribuição de risco dados os diferentes estados da natureza possíveis.

### Capítulo III - Comparação dos resultados

Como vimos na seção anterior, o abandono da hipótese de mercados completos provavelmente gera uma perda de eficiência. O motivo fundamental para o equilíbrio com mercados contingentes completos ser mais eficiente do que o equilíbrio (quando existe) com mercados incompletos diz respeito à distribuição de risco que os agentes vão ser capazes de realizar. Isso ocorre porque os agentes não podem assinar todos os contratos desejados: alguns não estão disponíveis, outros implicariam uma possibilidade de inadimplência. Sob mercados completos, a distribuição de risco é eficiente: nenhum agente deseja realizar transferência de renda de um estado da natureza para outro. A questão que pode ser colocada é: quando os mercados são incompletos, existe alguma maneira de minimizar a perda de eficiência que ocorre, ou apenas abrir novos mercados pode recuperar a eficiência perdida?

A resposta é que existem mecanismos que permitem que, sob mercados incompletos, não haja uma perda tão significativa de eficiência. Na verdade, pode-se limitar a perda de eficiência arbitrariamente através de um artifício simples: basta permitir que os agentes possam quebrar promessas. Em outras palavras, permitir a inadimplência pode limitar a perda de eficiência.

No modelo de equilíbrio geral clássico, a inadimplência representa nada além de um custo para a economia – uma perda de eficiência. Como é possível assinar contratos para qualquer contingência (ou seja, existe um mercado para cada possível contingência), todo agente é capaz de distribuir risco eficientemente, sendo capaz de cumprir suas obrigações em qualquer estado da natureza no qual tenha se submetido a algum contrato. Logo, com mercados completos, é válido o resultado (provado por K. Arrow) de que deve-se evitar completamente a inadimplência, punindo-a com uma penalidade infinita. Assim, penalidades infinitas garantiriam o cumprimento dos contratos e a eficiência.

Quando os mercados são incompletos, porém, a inadimplência passa a ter um papel positivo. Mercados incompletos significa que o agente nem sempre pode distribuir renda entre diferentes estados da natureza da maneira desejada. Por exemplo, suponha que o agente deseje transferir renda do estado da natureza 1 para o estado 2, mas que não exista contrato que permita essa transferência a menos que o agente seja obrigado a efetuar determinado pagamento em algum estado 3 pouco provável, mas no qual o agente não poderia efetuar o

pagamento. Se não houver possibilidade de inadimplência, mesmo que o agente deseje aceitar esse contrato (aceitando, por exemplo, uma penalidade moderada caso ocorra o estado 3), o contrato não poderá ser assinado – i.e., perde-se a possibilidade de expandir o volume de contratos contingentes mesmo que isso fosse melhorar a situação do agente, ou seja, mesmo que isso fosse aumentar o bem estar. Logo, permitir a inadimplência pode, por esse mecanismo, aumentar o bem-estar geral. Em resumo, permitir que os agentes façam contratos que eles provavelmente poderão cumprir leva a um ganho de eficiência ao permitir um aumento do volume de contratos contingentes e, portanto, uma melhora na distribuição de risco.

Como foi dito, podemos definir mercados contingentes incompletos como uma economia na qual o número de obrigações que os agentes podem contratar é inferior ao número de estados da natureza possíveis. Logo, haverá estados da natureza para os quais o agente gostaria de transferir renda, mas não há um contrato disponível para tal transferência. Em geral, pode-se simplificar essa diferença dizendo que existem infinitos estados da natureza, mas apenas um número finito de contratos disponíveis.

Vale dizer que, quando os mercados são incompletos, abrir novos mercados (disponibilizar novos contratos) pode não levar a um ganho de eficiência. Se os novos contratos incluírem pagamentos impossíveis em estados improváveis, eles não contribuirão para o aumento da eficiência. Isso muda quando a inadimplência é permitida: nesse caso, abrir novos mercados gera ganho de eficiência. Logo, permitir inadimplência não apenas aumenta a eficiência dado o número de contratos, mas também contribui para o aumento do bem-estar por outro canal: torna a abertura de mercados mais eficiente.

A ressalva que deve ser feita é imediata. Certamente, não é eficiente permitir a quebra de contratos em toda e qualquer situação – caso fosse possível, não haveria assinatura de contratos contingentes, e não haveria qualquer possibilidade de redistribuição de risco entre os agentes. Deve-se, então, construir um modelo que permita a inadimplência, mas imponha algum custo para que seja limitada.

Há duas possibilidades bastante estudadas na literatura. A primeira é o estabelecimento de penalidades brandas. Isso significa que o agente não estará inteiramente impossibilitado de quebrar contratos, mas o fará quando o custo da penalidade (ponderado pela probabilidade de

ocorrência da penalidade) que lhe será imposta não exceder o ganho esperado de assinar o contrato para o qual existe uma possibilidade de descumprimento.

A segunda possibilidade é substituir a penalidade pelo uso de colateral. Através do colateral, o agente se compromete a oferecer alguma garantia material nos estados da natureza em que não é possível (ou não é desejado) cumprir o contrato. Assim, o agente poderá quebrar contratos (o que garantirá a assinatura de contratos que não seriam assinados caso as penalidades sobre quebra fossem infinitas), mas estará limitado pelo valor do colateral depositado no momento em que deve decidir se respeita ou não o contrato.

Nas duas próximas seções, apresentaremos modelos que caracterizam a alocação de equilíbrio nessas duas hipóteses.

## Capítulo IV - Colateral e Inadimplência

Nesta seção, iremos apresentar o primeiro modelo de restrição limitada de inadimplência em mercados incompletos: existe a possibilidade de quebrar contratos, mas o agente perde o colateral caso quebre o contrato. O modelo desenvolvido é baseado em Geanakoplos (1996). A descrição do modelo serve para avaliar o equilíbrio com colateral tanto para mercados completos quanto incompletos, para que possa ser feita a comparação. Na primeira parte, apresentaremos o modelo e a condição de equilíbrio. Na segunda parte, comparamos o modelo apresentado com três outros casos: mercados completos (todos os contratos desejados são assinados e respeitados; não há necessidade de colateral); mercados com total quebra de contratos (nenhum contrato é assinado; também não há necessidade de colateral); e mercados incompletos com penalidade infinita para inadimplência (alguns contratos são assinados; outros, mesmo desejados, estão indisponíveis, ou implicariam probabilidade positiva de inadimplência). Na terceira parte, apresentaremos algumas das propriedades do equilíbrio com colateral. Na quarta parte, faremos uma rápida ressalva quanto ao papel do colateral.

Vale dizer que nenhum dos resultados apresentados será demonstrado formalmente; tal objetivo exigiria uma sofisticação matemática além do que pode ser utilizado nesta monografia.

### 4.1) Equilíbrio com Colateral

A primeira definição que deve ser dada é a de estados da natureza, algo que já foi referido nas seções anteriores. Um estado da natureza é uma descrição completa do que acontecerá com cada ativo, cada bem e cada preferência na economia em toda sua duração. É o conceito fundamental para se estudar contingências – cada estado da natureza representa uma contingência para um período em que exista incerteza. O conjunto de todos os possíveis estados da natureza será denotado por  $S$ , e cada estado da natureza será representado por  $s \in S$ . Seguindo ainda Geanakoplos, suporemos dois períodos: presente e futuro. Há incerteza apenas sobre o futuro.

A segunda definição é a descrição dos agentes nessa economia. Supondo que existam  $L$  bens, a decisão de um agente é um plano de consumo que especifique o que ele consome no presente e o que ele consome em cada um dos possíveis estados da natureza no futuro. Assim, o espaço de decisão do agente será representado por  $R^L_+ \times R^{sL}_+$ . O primeiro termo significa que o agente escolhe um consumo não negativo entre os  $L$  bens no presente, e o segundo significa que ele escolhe um consumo não negativo em cada um dos estados possíveis da natureza no futuro. A utilidade de cada agente  $h$  será descrita pela forma

$$U^h : R^L_+ \times R^{sL}_+ \rightarrow \mathbb{R},$$

significando que associa a cada plano de consumo um valor real. Essa função pode assumir qualquer forma (incluindo von Neumann-Morgenstein), desde que seja monotônica, côncava e contínua.

A dotação do agente é contingente: sua dotação no presente é certa, mas sua dotação no futuro depende do estado da natureza que ocorra. Assim, a dotação de cada agente  $h$  pode ser representada pela forma:

$$e^h \in R^L_{++} \times R^{sL}_{++},$$

significando que a dotação no presente e em cada contingência é estritamente positiva.

Sabemos que, se o agente não negociar, deverá consumir sua dotação em cada estado. Isso pode ser indesejado, por exemplo, porque o agente associa uma probabilidade alta a um estado da natureza em que sua dotação é baixa, e uma probabilidade baixa a um estado da natureza em que sua dotação é alta. Logo, é racional para o agente tentar transferir renda do segundo estado para o primeiro caso.

Como foi dito, o mecanismo para tal transferência é uma obrigação que o agente compra ou vende. Quando o agente compra uma obrigação, ele está comprando o direito de receber renda em determinado estado da natureza, caso esse se materialize. Quando o agente vende uma obrigação, um outro agente terá o direito de receber dele uma determinada renda em algum estado da natureza. Assim, os agentes conseguem transferir renda entre diferentes estados da natureza, dependendo de suas dotações iniciais, das probabilidades que associam a cada estado e da decisão ótima de cada um. Uma obrigação, portanto, é um ativo que pode ser negociado como qualquer outro. O espaço de obrigações será designado por  $J$ ; cada obrigação, por  $j \in J$ . Um ativo será descrito como  $A^j \in R^{sL}_+$ : trata-se de uma cesta de bens

que o agente se compromete a pagar (ou outro agente está comprometido a pagar a ele) em um determinado estado da natureza. O preço associado a esse ativo é  $p^s A^s_j$ , o valor que deverá ser pago caso ocorra o estado  $s$ .

Dado que estamos considerando a possibilidade de inadimplência, um agente pode pagar menos do que o valor da obrigação. Defina  $D^h_{sj}$  como o pagamento que o agente  $h$  efetua no estado  $s$ . Podemos então definir o valor de inadimplência como  $(p^s A^s_j - D^h_{sj})$ .

O colateral é utilizado como alguma garantia para o pagamento. Assim, podemos reescrever um ativo como a obrigação que o agente compra ou vende e o colateral associado a essa obrigação. Assim, o ativo será descrito como  $(A^j, C_j)$ , em que  $C_j$  representa o colateral associado à promessa  $j$ . Não faremos distinção da forma como o colateral é garantido (se é estocado, se fica com o comprador ou com o vendedor): basta que esteja de fato garantido. O preço associado a  $(A^j, C^j)$  é  $\pi_j$ . Vale ressaltar que  $\pi_j$  é o preço do ativo, diferente portanto de  $p_s$ , o preço de um bem no estado  $s$  (que não constitui por si só um ativo).

Por último, o colateral pode assumir diferentes valores ao longo do tempo. Se uma garrafa de vinho for usada como colateral, ela pode se valorizar; se algo perecível for utilizado, deve perder valor. Cada bem  $l$  usado como colateral se torna um vetor de bens  $Y_{sl}$  em cada estado da natureza. Pode-se interpretar  $Y_s$  como o vetor que transforma o bem  $l$  (o colateral) no vetor de bens  $Y_{sl}$  no estado  $s$ . Assim, o valor que o colateral de fato oferece é:  $p_s(Y_s C_j)$ .

Logo, o pagamento  $D^h_{sj}$  que o agente  $h$  irá de fato efetuar na contingência  $s$  é o mínimo entre  $p_s(Y_s C_j)$  e o valor da obrigação contratada,  $p^s A^s_j$ . Ou seja: caso, na contingência  $s$ , o valor do colateral seja menor do que o valor da obrigação, o agente preferirá não respeitar o contrato, deixando a outra parte tomar posse do colateral posto em garantia no momento da assinatura do contrato.

Assim sendo, podemos agora definir quais são as condições para que uma economia esteja em equilíbrio. Uma economia pode ser descrita por três bases:

- os agentes, caracterizados por suas utilidades e suas dotações contingentes;
- as promessas, definidas a partir de um ativo e do colateral associado;
- o vetor de transformação do colateral no tempo.

O equilíbrio competitivo assume que o vetor de preços  $(p, \pi)$  – os preços de cada bem e de cada ativo – são independentes da atuação de cada agente individualmente. Represente o volume de ativos  $j$  comprados como  $\theta_j$ , e o volume de ativos vendidos por  $\varphi_j$ . Represente o conjunto orçamentário aos preços  $(p, \pi)$  como  $B(p, \pi)$ .

O equilíbrio ocorre, então, quando quatro condições são respeitadas:

i) a demanda iguala a oferta em todos os mercados de bens

$$\sum_h (x_0^h - e_0^h - \sum_j C_j \varphi_j^h) = 0$$

ii) a demanda iguala a oferta em todos os mercados de ativos

$$\sum_h (\theta^h - \varphi^h) = 0$$

iii) a restrição orçamentária de cada agente é respeitada

$$(x^h, \theta^h, \varphi^h) \in B(p, \pi)$$

iv) todos os agentes estão fazendo suas escolhas ótimas

$$(x^h, \theta^h, \varphi^h) \in B(p, \pi) \Rightarrow (x^h, \theta^h, \varphi^h) \in \operatorname{argmax} u^h$$

#### 4.2) Comparação com outros equilíbrios

Para comparar o equilíbrio acima, basta reinterpretar as quatro condições de equilíbrio assumindo que não exista colateral ou inadimplência.

##### 4.2.1) Caso em que todos os ativos estão disponíveis

Supõe-se que todas as obrigações que os agentes possam querer comprar ou vender estão disponíveis, i.e., o conjunto  $J$  descrito anteriormente engloba todos os valores de  $j$  que os agentes desejam (os mercados são completos). Como dito anteriormente, no equilíbrio, o risco é distribuído de maneira eficiente. Assim, atinge-se o máximo de bem-estar: o equilíbrio é eficiente de Pareto. A única condição que deve ser respeitada é que de fato todos os contratos sejam cumpridos, o que pode ser garantido pela simples imposição de penalidades infinitas para qualquer quebra de contrato. Uma característica desse equilíbrio é que o preço dos bens duráveis atingiria seu valor máximo, pois um agente poderia comprar um bem que

Ihe ofereça retorno por um longo período oferecendo em troca uma seqüência de obrigações sobre suas dotações futuras, obrigações que seriam automaticamente respeitadas nesse modelo.

#### 4.2.2) Caso em que nenhum ativo está disponível

Nesse caso, supõe-se que não há nenhum mecanismo para garantir que os contratos sejam respeitados. Assim sendo, nenhuma obrigação seria negociada, i.e., o conjunto  $J$  é vazio. Dado que os agentes que desejam comprar bens duráveis não poderiam oferecer nenhuma obrigação contingente, seus preços seriam mais baixos do que no caso acima.

Pode ser provado que o equilíbrio sempre existe. A diferença é que, nesse caso, o risco não é distribuído eficientemente.

#### 4.2.3) Equilíbrio com Mercados Incompletos

Trata-se de um caso sob certos aspectos intermediário aos dois últimos. Ao contrário do caso em que não existe nenhuma garantia sobre o cumprimento dos contratos, quando nenhuma obrigação (e, portanto, nenhum ativo) está disponível, aqui alguns ativos podem ser negociados. Supõe-se aqui, ainda, penalidades infinitas para inadimplência; assim, gera-se o resultado de que alguns ativos serão negociados (aqueles que os agentes têm certeza de que poderão cumprir), mas muitos ativos não podem ser negociados porque existiria possibilidade de inadimplência. Pode-se resumir essa descrição dizendo que o conjunto  $J$  não é vazio, mas é menor do que o conjunto  $S$ . Nesse caso, há alguma melhora na distribuição de risco em relação à dotação original, mas não se alcança a melhor distribuição possível. Como foi dito anteriormente, é possível melhorar essa distribuição (algum ganho de eficiência) se for permitido que os agentes se tornem inadimplentes em alguns estados da natureza, i.e., abandonando a hipótese de penalidades infinitas. O que o modelo descrito nessa seção indica é que existe ganho de eficiência se as penalidades infinitas forem trocadas por outra garantia de pagamento: o uso de colateral.

Ao contrário dos dois casos anteriores, não é possível garantir a existência de equilíbrio.

#### 4.3) Propriedades do Equilíbrio com Colateral

O primeiro resultado fundamental é a existência de equilíbrio no modelo descrito anteriormente. Pode ser provado que esse equilíbrio sempre existe.

O segundo resultado diz respeito à possibilidade de aumento de bem-estar a partir da alocação de equilíbrio. Como foi dito, a possibilidade de uso de colateral, ao permitir alguma quantidade de inadimplência em equilíbrio, aumenta o bem estar em relação à alocação de mercados incompletos e penalidade infinita. Logo, pode-se imaginar que um aumento da quantidade disponível de colateral aumente o bem-estar. Outra opção é, dada a quantidade de colateral disponível, transferir-se renda para agentes que não pudessem comprar colateral, ou facilitar de alguma maneira o acesso a colateral. Pode ser provado que, nessa opção, não há nenhum ganho de bem-estar.

#### 4.4) Uma Ressalva

Pelo que foi dito acima, fica claro o mecanismo a partir do qual a introdução de colateral na economia pode aumentar o bem estar econômico. Ao substituir penalidades infinitas por colateral como forma de coagir os agentes a cumprir os contratos, permite-se que haja uma quantidade de equilíbrio positiva de inadimplência. Isso, por sua vez, permite que haja um aumento do número de ativos que os agentes irão negociar em equilíbrio, o que deverá melhorar a distribuição de risco. Esse raciocínio, porém, não leva em consideração um possível efeito negativo do uso de colateral sobre a quantidade de ativos negociados em equilíbrio. Alguns ativos que eram negociados anteriormente sem a necessidade de colateral podem deixar de ser negociados, agora que se impõe uma restrição a mais sobre o vendedor da obrigação. Logo, o uso de colateral tem dois efeitos sobre a quantidade de ativos negociados em equilíbrio, um positivo e um negativo. Considera-se, em geral, que o efeito negativo é pequeno em termos de bem estar em relação ao efeito positivo, donde o efeito líquido do uso de colateral seria positivo.

#### 4.5) Outra Ressalva

Vale ressaltar que o modelo descrito não é completo: não determina qual o colateral que vai ser utilizado. Sabe-se que, em equilíbrio, um determinado vetor de bens vai ser utilizado para compor os ativos que serão negociados, dentre os  $L$  bens disponíveis. Como esse vetor não é determinado pelo modelo, podemos falar que esse modelo não endogeneiza o colateral. Uma possível extensão deve ser construir modelos no qual o colateral é endógeno.

## Capítulo V - Penalidades e Inadimplência

Nesta seção, apresentaremos outro modelo de equilíbrio com inadimplência. Novamente, é válido o resultado de que a inadimplência provavelmente melhora o bem-estar econômico, desde que sob alguma restrição. Ao contrário da seção anterior, a restrição não é feita obrigando o vendedor de uma obrigação a disponibilizar alguma garantia ao comprador. Em caso de inadimplência, o comprador assume todo o prejuízo, mas o vendedor sofre alguma punição. Seguimos os modelos propostos por Zame (1993) e Dubey-Geanakoplos-Shubik (1990), fazendo a suposição de que a punição é não-econômica: o agente inadimplente é penalizado com a diminuição de sua utilidade. Por exemplo: o agente não sofre qualquer restrição a sua capacidade de contrair crédito no futuro por conta de uma quebra de contrato, mas é submetido a alguma punição física. Além disso, a punição é proporcional à diferença entre o valor devido e o valor efetivamente pago, sendo independente do estado da natureza, do agente e do ativo.

Devemos encontrar um resultado semelhante, pelo menos em alguns aspectos, ao equilíbrio com colateral. Novamente, a idéia é permitir a expansão do volume de contratos contingentes, donde o equilíbrio resultante, em termos de bem-estar, deve estar entre o equilíbrio de Arrow-Debreu e o equilíbrio sem transação de ativos. A forma de se permitir algum nível de inadimplência muda, mas seu benefício é o mesmo.

### 5.1) O Modelo

A descrição do modelo será semelhante à da seção anterior. Há dois períodos, com incerteza a respeito do segundo.  $L$  é o conjunto de bens; cada bem,  $l \in L$ . Há  $S$  estados da natureza (cada um designado por  $s$ ) possíveis no período 2, sendo  $S = \{1, \dots, S\}$ . Para facilitar a notação, o primeiro período será designado por estado 0, e definiremos:

$$S^* = \{0\} \cup S$$

( $S^*$  não é, portanto, o conjunto de estados contingentes).

Ainda como no modelo anterior:

$h \in H$  é o conjunto de agentes; as dotações e as funções utilidade de cada agente são definidas da mesma forma.

$j \in J$  é o conjunto de ativos, ou obrigações.

Defina  $A$  matriz na qual as linhas são os  $S$  estados da natureza as colunas são os  $J$  ativos disponíveis na economia. Obviamente, o posto dessa matriz determina se os mercados são completos ou incompletos.

Por último, defina  $\lambda_{sj}^h$  como a penalidade por unidade do bem  $l$ , parte do ativo  $j$ , que o agente  $h$  deixa de pagar no estado da natureza  $s$ .

Há três variáveis que deverão ser determinadas em equilíbrio. Em primeiro lugar, o vetor de preços  $\mathbf{p}$ , o preço de equilíbrio de cada bem. Em segundo lugar, o vetor  $\boldsymbol{\pi}$ , os preços de equilíbrio de todos os ativos. Terceiro, a matriz  $\mathbf{K}_{S \times J}$ , na qual cada entrada  $k_{sj}$  representa o percentual efetivamente pago do valor da obrigação (i.e.,  $(1-k_{sj})p_{sj}A_{sj}$  é o valor da inadimplência em relação ao ativo  $j$ , no estado  $s$ ).

Defina ainda  $x \in R_+^{S \times L}$  como o conjunto de bens consumidos;  $\theta \in R_+^J$  como o vetor dos  $J$  ativos comprados; e  $\varphi \in R_+^J$  como o vetor de ativos vendidos.  $D_{sj}$  é a quantia efetivamente paga pelo ativo  $j$  no estado  $s$ .

A restrição orçamentária  $B^h(\mathbf{p}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{K})$  é definida como:

$$\mathbf{P}(x_0 - e_0) + \boldsymbol{\pi}(\theta - \varphi) = 0; \mathbf{p}_s(x_s - e_s^h) + \sum_j D_{sj} \leq \sum_j K_{sj} A_{sj} \theta_j, \forall s \in S$$

Dada essa restrição, podemos agora definir a “utilidade líquida” esperada do agente  $h$  como:

$$W^h(x, \theta, \varphi, D) = u^h(x) - \sum_j \sum_s \lambda_{sj}^h (A_{sj}^s - D_{sj}^h)$$

Podemos agora definir a condição de equilíbrio nesse modelo, ligeiramente diferente daquela determinada na seção anterior. Além dos vetores  $(\mathbf{p}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{k})$ , devemos encontrar os vetores  $(\mathbf{x}^h, \boldsymbol{\theta}^h, \boldsymbol{\varphi}^h, \mathbf{D}^h)$  tal que as seguintes condições sejam respeitadas (as variáveis em negrito representam os valores assumidos no equilíbrio):

- i) Normalização:  $p_{sL} = 1, \forall s \in S^*$
- ii) Maximização individual:  $(\mathbf{x}^h, \boldsymbol{\theta}^h, \boldsymbol{\varphi}^h, \mathbf{D}^h) \in \operatorname{argmax} w^h(\mathbf{x}^h, \boldsymbol{\theta}^h, \boldsymbol{\varphi}^h, \mathbf{D}^h)$
- iii) Equilíbrio no mercado de bens:  $\sum_h (\mathbf{x}^h - e^h) = 0$
- iv) Equilíbrio no mercado de ativos:  $\sum_h (\boldsymbol{\theta}^h - \boldsymbol{\varphi}^h) = 0$

- v) Nível de inadimplência de equilíbrio:  $\mathbf{K}_{sj} = (\sum_h \mathbf{D}_{sj}) / (\sum_h A_{sj} \boldsymbol{\varphi}_j^h)$ ,  $(\sum_h A_{sj} \boldsymbol{\varphi}_j^h) > 0$ ;  
Arbitrário, se  $A_{sj} = 0$
- vi)  $\sum_h \boldsymbol{\varphi}_j^h = 0 \Rightarrow \mathbf{K}_{sj} \geq \sum_h t_j^h \delta_{sj}^h$ , em que  
 $\delta_{sj}^h = 1$ , se  $\partial u^h(\mathbf{x}^h) / \partial x_{sL} < \lambda_{sj}^h$ ;  $\delta_{sj}^h = 0$ , se  $\partial u^h(\mathbf{x}^h) / \partial x_{sL} > \lambda_{sj}^h$

A primeira condição serve para simplificar a notação; as condições (ii), (iii) e (iv) são idênticas ao equilíbrio com colateral.

A condição (v) diz que, em equilíbrio, todo agente espera receber o pagamento de um determinado percentual do total de empréstimos que fez (ou, analogamente, espera efetuar o pagamento de apenas uma parte de suas obrigações). Esse nível de equilíbrio é o mesmo para cada prestador (dado o ativo  $j$  e o estado da natureza  $s$ ), e não é afetado pela escolha de  $\theta_j^h$ , i.e., pela escolha de quanto emprestar do ativo  $j$ . Claro está que os agentes só podem formar essa expectativa se o ativo  $j$  estiver de fato sendo negociado no equilíbrio; caso contrário, devemos encontrar outra maneira de descrever as expectativas.

O prestador espera que o tomador venda uma proporção  $t_j^h$  do ativo  $j$ , sendo  $t_j^h > 0$ , apenas para os agentes que venderiam o ativo mesmo para um preço de equilíbrio um pouco maior (i.e., mesmo para  $\pi_j + \epsilon$ ).

Além disso, o prestador espera que o tomador efetue o pagamento apenas se a penalidade for suficientemente alta, i.e., para algum  $\lambda$  estritamente maior do que zero. Assim, explica-se a condição (vi). Por essa condição, vemos claramente que o limite mínimo do percentual de pagamento depende diretamente da penalidade: se a variação da utilidade do agente  $h$  em equilíbrio for maior do que a penalidade, para todo agente  $h$ , então o limite inferior para o percentual de pagamento será igual a zero.

## 5.2) Resultados do modelo

Vale dizer que, ao contrário da seção anterior, o modelo aqui apresentado engloba o modelo de equilíbrio geral com mercados incompletos tradicional: basta determinar um nível de penalidade suficientemente alto (supondo, por facilidade,  $\lambda = \infty$ ) para evitar inteiramente a existência de inadimplência. No modelo anterior, caso se excluísse a possibilidade de

colateral, o modelo se tornaria igual àquele descrito na sub-seção sobre equilíbrio sem ativos negociados: sem colateral e, por definição, sem penalidade, não seria feito nenhum empréstimo, e não haveria qualquer redistribuição de risco.

Um resultado importante que vale ser apresentado diz respeito ao Teorema de Modigliani-Miller: esse teorema deixa de valer quando existe um nível positivo de inadimplência. Quando as penalidades são suficientemente altas a ponto de evitar inadimplência (i.e., estamos no modelo tradicional de mercados incompletos), sabe-se que o equilíbrio não é afetado pela adição de ativos cujos payoffs sejam combinações lineares dos payoffs de outros ativos. Essa propriedade pode ser interpretada como a versão do teorema de Modigliani-Miller em economias com mercados incompletos, e pode ser traduzida como “existência de ativos irrelevantes”. Se, ao contrário, a penalidade for estabelecida em algum nível que permita a existência em equilíbrio de algum nível de inadimplência, então pode ser mostrado que o equilíbrio é alterado pela adição de ativos cujos payoffs sejam combinações lineares de payoffs já existentes. Logo, não é mais válido dizer que o equilíbrio é independente de todo e qualquer “ativo irrelevante” (no sentido descrito acima).

Sabemos que o equilíbrio com colateral sempre existe. Naturalmente, cabe perguntar se o modelo descrito nessa seção é capaz de apresentar um resultado tão forte quanto esse, i.e., se existe um equilíbrio com alguma inadimplência para qualquer penalidade positiva, mas não infinita. A resposta é sim: desde que sejam respeitadas duas condições. Primeiro, as colunas da matriz  $A$  definida anteriormente devem ser linearmente independentes: os vetores de proporção de inadimplência de cada ativo  $j$  nos  $s$  estados da natureza devem ser linearmente independentes. Segundo, a penalidade não apenas deve ser maior do que zero, mas deve estar sempre suficientemente afastada de zero tal que  $|\lambda-0| > k$  para algum valor positivo de  $k$ . Isso significa que, dada a descrição dos agentes (utilidades e dotações), não podemos tomar qualquer valor arbitrariamente próximo de zero para  $\lambda$ , pois, a partir de um certo valor, sempre valerá a pena quebrar o contrato e aceitar a punição, donde os agentes vão antecipar que todos os contratos serão quebrados, donde o equilíbrio será idêntico àquele apresentado na seção 4.2.2: não haverá qualquer ativo negociado. Obviamente, trata-se de um equilíbrio sem inadimplência, diferente do que procuramos nessa seção. Se essas condições forem

respeitadas, porém, prova-se que o equilíbrio sempre existe (Dubey-Geanakoplos-Shubik, 1990).

Como mencionado no capítulo 3, existe outro canal a partir do qual a inadimplência pode aumentar a eficiência da alocação de equilíbrio: a abertura de novos mercados pode aproximar a economia do equilíbrio de Arrow-Debreu apenas quando existe a possibilidade de inadimplência. Podemos traduzir isso de maneira mais formal da seguinte maneira: na ausência de inadimplência, o equilíbrio de mercados incompletos é assintoticamente ineficiente. Isso significa que abrir um número infinito de novos mercados não aumenta a eficiência do equilíbrio: mesmo que o conjunto de ativos  $J$  se torne arbitrariamente próximo do conjunto  $S$  de estados da natureza possíveis (i.e., se aproxime, mas não alcance, da condição de eficiência do equilíbrio de Arrow-Debreu), a implicação disso (a eficiência do equilíbrio) não se aproxima da implicação do equilíbrio de Arrow-Debreu (optimalidade do equilíbrio). Seja  $A$  o número de contratos disponíveis em cada caso abaixo; logo,  $A$  significa que  $J=S$ , e  $A'$  significa  $J \subset S \wedge J \neq S$ .  $B$  significa optimalidade da alocação de equilíbrio, e  $B'$  significa sub-optimalidade. Então, ineficiência assintótica pode ser descrita como:

Equilíbrio com mercados completos:  $A \Rightarrow B$

Equilíbrio com mercados incompletos:  $A' \Rightarrow B'$  (supondo que seja verdade; é uma hipótese, não algo uma implicação necessária de  $A'$ )

Mas  $A' \rightarrow A$  não implica  $B' \rightarrow B$

Não há uma demonstração formal de que, para qualquer seqüência de obrigações escolhida que se acrescente infinitamente ao conjunto  $A'$ , a ineficiência assintótica seja válida. Seguimos Zame (1993), afirmando que os modelos construídos que geram tal ineficiência são o caso típico, e não uma exceção. Retomando a referência já utilizada, a ineficiência resulta da impossibilidade de se distribuir o risco de maneira ideal a partir da seqüência de obrigações escolhida. Como foi dito, porém, a possibilidade de inadimplência elimina a ineficiência assintótica.

Em resumo, o modelo traz dois resultados. Primeiro, a inadimplência aumenta a eficiência; segundo, elimina a ineficiência assintótica.

## Capítulo VI - Colateral e Penalidade

Alguns resultados comuns às duas seções anteriores, mas ainda não mencionados, serão tratados nessa seção.

Em primeiro lugar, lembramos que ainda não foi dita uma palavra a respeito de problemas informacionais. Sabe-se que a existência de informação assimétrica também é, por hipótese, eliminada no modelo de equilíbrio geral clássico. Considerando-se que exista assimetria informacional, portanto, ocorre mais uma perda de eficiência em relação ao modelo de mercados completos. Logo, deveríamos levar em consideração também problemas de natureza informacional na análise de ganho ou perda de eficiência quando colateral ou penalidades brandas são impostos no modelo de mercados incompletos. Permitir inadimplência na existência de informação assimétrica gera um problema a mais quando se toma a decisão de que obrigações comprar: um agente pode ser menos confiável do que outro ao oferecer pagamentos em determinados estados da natureza.

Implicitamente, a maneira como isso foi resolvido foi garantir o anonimato dos agentes que vendem obrigações; assim, o comprador não precisa se preocupar em gerar uma estrutura de incentivos para atrair os agentes mais confiáveis. Em outras palavras, o risco é distribuído igualmente entre os compradores de obrigações: dada a ocorrência de um determinado estado da natureza, um comprador não fica em pior situação do que outro por ter escolhido vendedores piores.

Em segundo lugar, vale lembrar que a inadimplência pode ter duas causas. Primeiro, pode ser resultado da falta de sorte de um agente que assina uma obrigação – em outras palavras, o estado  $s$  que de fato ocorre simplesmente não foi levado em consideração. Mais importante, porém, é considerar a inadimplência estratégica: quando um agente assina um contrato levando em consideração a possibilidade de se tornar inadimplente em alguma contingência. Esse último caso é importante porque é a partir desse comportamento estratégico que a imposição de penalidades ou a exigência de colateral quando da assinatura de um contrato contingente afeta o comportamento ótimo do agente e, portanto, afeta o equilíbrio. Esses dois mecanismos, portanto, só levam a um aumento de bem-estar quando afetam a decisão de quebrar contratos de cada agente, ou seja, quando esta é de fato uma decisão, e não um acaso.

Por último, ao afetar a decisão de descumprir contratos dos agentes, modelos de penalidades e colateral podem ser utilizados para construir modelos de falência. A existência de uma quantidade positiva de inadimplência em equilíbrio leva automaticamente a uma probabilidade positiva de falência em equilíbrio. Isso significa que a falência de firmas emprestadoras não é um sinal de desequilíbrio em uma economia competitiva. Podemos parafrasear Zame e dizer que assim como existe um nível ótimo de poluição (não seria ótimo proibir inteiramente atividades poluidoras), existe também um nível ótimo de quebra de firmas. Novamente, ressaltamos que isso é um resultado de se determinar um equilíbrio com alguma inadimplência. Em um modelo sem inadimplência, a falência de uma empresa emprestadora que não conseguiu recuperar seus empréstimos é, sem dúvida, um sinal de desequilíbrio (ao menos, quando a falência se deve estritamente à não-recuperação de créditos, e não a qualquer outra causa). Isso é verdadeiro tanto quando consideramos o equilíbrio de mercados completos com penalidade infinita (como mercados completos determinam um equilíbrio eficiente, a inadimplência é apenas um custo a ser evitado com penalidades infinitas), tanto quando consideramos um modelo sem restrição a penalidades (como ninguém compra uma obrigação por antecipar seu não-pagamento, não há obrigação a ser quebrada).

Em outras palavras: a decisão de uma regra para inadimplência é o primeiro passo para a escolha de uma regra para falências.

A presença no equilíbrio de um nível positivo, porém não infinito, de falências leva imediatamente à questão: quais são os benefícios e quais são os custos que são considerados para se alcançar esse nível? Na ausência de custos de uma falência, o nível ótimo de falência seria infinito; na ausência de benefícios, o nível ótimo seria igual a zero. Se o equilíbrio determina uma quantidade positiva menor do que infinito, devemos observar ambos.

Esses custos e benefícios, naturalmente, são semelhantes àqueles apontados anteriormente em respeito à inadimplência – o que é esperado, dado que é esta que determina (ou, ao menos, contribui para a determinação) o nível de falências. Vamos apresentar aqui, então, um custo e um benefício que ainda não foram mencionados.

O custo é específico ao modelo de penalidades: quando ocorre a inadimplência, não há simples transferência de propriedade para o emprestador lesado (como no modelo com colateral); a imposição de uma penalidade é um peso-morto para a sociedade. Obviamente,

esse peso morto não pode deixar de acontecer – caso contrário, teríamos um problema de inconsistência dinâmica que acabaria por anular os efeitos coercitivos da penalidade, levando a um equilíbrio em que os agentes antecipam a inadimplência e não emprestam.

O benefício diz respeito à realocação de renda entre diferentes estados da natureza que um agente consegue realizar. Um agente pode comprar e vender o mesmo ativo. Sem possibilidade de inadimplência, isso é irrelevante. Com a possibilidade de inadimplência, o agente pode planejar não cumprir algumas de suas obrigações. Logo, a diferença entre o valor dos ativos que o agente recebe pode ser maior do que o valor dos ativos que o agente se compromete a pagar. Como resultado, o agente pode aumentar a dimensão da realocação de renda entre diferentes estados da natureza ao transacionar ativos.

## Conclusão

Podemos resumir a idéia central do trabalho da seguinte maneira: quando os mercados são incompletos, existe um *tradeoff* entre os custos da inadimplência e seus benefícios, notadamente o ganho em distribuição de risco.

O primeiro resultado relevante apresentado diz respeito à provável perda de eficiência que ocorre quando os mercados são incompletos. Como foi dito, tal perda decorre da impossibilidade de um agente efetuar todas as transações de renda entre diferentes estados da natureza que possa desejar; logo, pode ser impossível distribuir risco da maneira ideal. Assim, explica-se a possível ineficiência.

O segundo resultado apresentado foi um mecanismo para limitar essa perda de eficiência: ao permitir algum nível de inadimplência, pode-se aumentar o volume de contratos contingentes, e, portanto, aumentar as possibilidades de distribuição de risco entre diferentes estados da natureza. Logo, os agentes podem alcançar uma alocação de maior utilidade, o que representa uma melhoria de Pareto.

A questão decorrente desse segundo resultado – a saber, a necessidade de se criar algum mecanismo para limitar a inadimplência – leva às duas conclusões seguintes.

Primeiro, a substituição de penalidades infinitas pelo uso do colateral como algum contrapeso ao incentivo à inadimplência gera um equilíbrio em que possivelmente há uma melhoria de Pareto em relação ao equilíbrio sem inadimplência. Em outras palavras, o uso de colateral expande o volume de contratos contingentes.

Segundo, o uso de penalidades brandas gera o mesmo resultado, ainda que impondo um peso morto à sociedade (a aplicação da penalidade) em caso de inadimplência.

Em resumo, a conclusão da monografia é que a inadimplência, desde que moderada por mecanismos como penalidades brandas ou colateral, melhora a distribuição de risco quando os mercados são incompletos, tendendo assim a representar uma melhoria de Pareto.

**Bibliografia**

ARAUJO, Alosio; PÁSCOA, Mário. Bankruptcy in a model of unsecured claims. IMPA – Preprints. Abril/2001

DUBEY, Pradeep; GEANALOPLOS, John; SHUBIK, Martin. Default and Efficiency in a general equilibrium model with incomplete markets. 1990

GEANALOPLOS, John. Promises Promises. Cowles Foundation Discussion Paper no.1143. 1996.

MONTEIRO, Paulo Klinger. A new proof of the existence of equilibrium in incomplete markets economies. 1991.

ZAME, W. Efficiency and the role of default when security markets are incomplete. 1993.