

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

**A VOLATILIDADE REALIZADA COMO UMA METODOLOGIA PARA
MODELAGEM E PREVISÃO DA VARIÂNCIA DOS RETORNOS DE ATIVOS
FINANCEIROS**

Aluno: Marcelo Ramos Costa Carvalho

Matrícula No.: 0015434-8/2

Orientador: Marcelo C. Medeiros (PUC-Rio)

Co-orientador: Leonardo L. Souza (EPGE – FGV)

Junho de 2003

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

**A VOLATILIDADE REALIZADA COMO UMA METODOLOGIA PARA
MODELAGEM E PREVISÃO DA VARIÂNCIA DOS RETORNOS DE ATIVOS
FINANCEIROS**

“Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realizá-lo a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor tutor.”

Aluno: Marcelo Ramos Costa Carvalho

Matrícula No.: 0015434-8/2

Orientador: Marcelo C. Medeiros (PUC-Rio)

Co-orientador: Leonardo L. Souza (EPGE – FGV)

Junho de 2003

“As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor.”

Dedico esta monografia aos meus pais, Marco e Eliane, que me deram a chance de chegar até aqui, me deram a base para que eu pudesse aproveitar esta chance e me deram o apoio para que pudesse vencer este desafio.

Dedico esta monografia à minha namorada, Camila, que esteve sempre presente ao meu lado, abrindo mão de momentos a meu lado para que pudesse me dedicar de forma integral a este trabalho e cuja contribuição para a conclusão deste trabalho foi fundamental, realizando a revisão e edição do texto.

Dedico também esta monografia ao Professor Marcelo Medeiros, que foi não apenas o orientador deste trabalho mas um tutor em minha carreira e cujas influências forjaram de maneira indelével minha formação como economista.

Dedico este trabalho ao Prof. Leonardo Souza, que aceitou co-orientar este trabalho em momento tão inoportuno e cujas sugestões permitiram a fundamentação desta discussão em sólidas bases teóricas. Sem sua colaboração a conclusão deste trabalho seria impossível.

Dedico esta monografia aos professores do departamento de Economia da PUC.

Dedico esta monografia a minha família, que tanto apoio e compreensão me deram.

- ÍNDICE

- I. Introdução

- II. Estimação de Volatilidade

- a) Importância

- b) Metodologias Usuais

- 1. ARCH (q)

- 2. GARCH (p,q)

- 3. EGARCH e TARCH

- 4. EWMA

- c) Volatilidade Realizada: Um breve Apanhado da Teoria Existente

- III. Alguns Resultados para Ativos Brasileiros

- a) Dados

- b) Construindo Retornos Diários e Volatilidade Realizada

- c) Propriedades dos Retornos e da Volatilidade Realizada

- IV. Avaliando Resultados para Diferentes Modelos

- a) Resultados Dentro da Amostra

- b) Resultados de Previsão

- V. Conclusão

- VI. Bibliografia

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Composição do IBOVESPA (Ações mais Líquidas)

Tabela 2: Quantidade de “Missing Values” por Ativo Estudado

Tabela 3: Estatística Descritiva dos retornos

Tabela 4: Teste de “Goodness of Fit” para os Retornos

Tabela 5: Estatística Descritiva da Volatilidade Realizada

Tabela 6: Teste de “Goodness of Fit” para a Volatilidade

Tabela 7: Estimativas para o Estimador de Diferenciação Fracional (d)

Tabela 8: Funções de Perda – Dentro da Amostra

Tabela 9: Funções de Perda (Modificada) – Dentro da Amostra

Tabela 10: Testes de Cobertura – Dentro da Amostra

Tabela 11: Funções de Perda – Fora da Amostra

Tabela 12: Testes de Cobertura – Fora da Amostra

I. INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento de novos instrumentos financeiros e de mercados de capitais cada vez mais complexos, surge a necessidade premente de um novo ferramental para a avaliação e previsão de movimentos de retornos de ativos financeiros. Sabe-se que os retornos diários de ativos financeiros são relativamente imprevisíveis, embora sua volatilidade seja relativamente previsível. Portanto, a volatilidade dos retornos de ativos financeiros tem papel central nas atuais teorias de precificação de ativos e gestão de risco.

Há, no entanto, um problema inerente ao uso de modelos em que a volatilidade assuma um papel central; esta é uma medida que não pode ser diretamente observada, sendo, muitas vezes, estimada por modelos da família ARCH, modelos de volatilidade estocástica ou então através de indicadores diretos como o quadrado dos retornos observados ex-post, estando, então, sujeita a erros de medição. A busca por um ferramental que permita uma melhor estimativa e previsão dos retornos de ativos financeiros e de sua volatilidade aplicado ao mercado financeiro brasileiro nos leva, neste trabalho, à análise de dados de alta frequência de ativos negociados neste mercado. Utilizando uma base de dados intradiários, recentemente disponível para ativos brasileiros, estaremos interessados em compreender como a informação contida nas observações intradiárias pode melhorar nossa capacidade de prever e entender movimentos no retorno e na volatilidade de ativos financeiros transacionados nos mercados brasileiros.

O objetivo central deste trabalho será comparar, empiricamente, a eficácia de diferentes métodos na modelagem e previsão da volatilidade diária do retorno de ativos financeiros transacionados no mercado de capitais brasileiro. Para tanto, este trabalho se divide em cinco seções. A seção 2 apresenta as metodologias usualmente aplicadas na modelação e previsão da volatilidade de séries de retornos financeiros e introduz o conceito de volatilidade realizada. A seção 3 aborda o conceito de volatilidade realizada de maneira empírica, apresentando alguns resultados referentes à realidade do mercado de capitais brasileiro. Na seção 4, comparamos os resultados obtidos para as variadas metodologias aqui abordadas quando implementadas com o objetivo de modelar e prever as volatilidades de cinco séries de retornos de ativos financeiros brasileiros. A seção 5 conclui.

II. ESTIMAÇÃO DE VOLATILIDADE

a) Importância

Em séries de retornos financeiros podemos observar, empiricamente, a presença de heterocedasticidade; ou seja, a variância condicional não é constante embora a variância incondicional (de longo-prazo) o seja. Observamos períodos de grande volatilidade seguidos por períodos de relativa tranquilidade, o que torna inapropriada a suposição de homocedasticidade.

O estudo de modelos condicionalmente heterocedásticos surge da necessidade de se modelar a variância condicional não observada, já que, principalmente em se tratando de modelagens de séries temporais provenientes do mercado financeiro, a variância incondicional de longo prazo pouco importa, pois as decisões do investidor são tomadas em uma dada janela de tempo (i.e. comprar um papel em t e vender em $t+1$).

b) Metodologias Usuais

1. ARCH(q)

A introdução do processo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedastic) por Engle (1982) mostrou ser possível, simultaneamente, modelar média e variância, permitindo-se separar movimentos previsíveis (média) de movimentos imprevisíveis (resíduo) e calcular a variância dos resíduos.

Sejam y_t e I_t , respectivamente, o valor de uma série temporal e a informação disponível no instante t . A média e a variância condicional são definidas por:

$$\begin{aligned} m_t &= E[y_t | I_t] \\ e \\ h_t &= E[(y_t - m_t)^2 | I_t] \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde m_t e h_t são funções das componentes de I_t . Se h_t não for constante, a série é heterocedástica.

O modelo ARCH é definido por:

$$\begin{aligned} y_t &= h_t^{1/2} \varepsilon_t \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde γ_t é um ruído branco normalmente distribuído de média nula e variância unitária ($\gamma_t \sim \text{IID } N(0,1)$).

O modelo ARCH(p) será estacionário, bem definido, se $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1 \dots \alpha_p \geq 0$. Os parâmetros $\alpha_1 \dots \alpha_p$ são estimados pelo método da máxima verossimilhança, como descrito abaixo.

Sabemos que função de densidade f_i de uma distribuição de retornos diários passados de um ativo financeiro assume a forma de:

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_i^2}{h_t}} \quad (2.3)$$

onde

x_i = observações de retornos diários;

h_t = variância condicional (Ver Eq. (4))

Portanto, podemos estimar a função de verossimilhança (L) como sendo:

$$L = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_i^2}{h_t}} \right\} \quad (2.4)$$

A log-verossimilhança (l) será o logaritmo neperiano da função de verossimilhança:

$$l = \ln(L) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(h_t) - \frac{1}{2} \frac{(x_i)^2}{h_t} \right\} \quad (2.5)$$

A maximização de $l(h_t)$, tal que $\frac{\partial l(h_t)}{\partial h_t} = 0$, nos fornece os parâmetros do modelo

ARCH que aparecem na Eq. (4), tais que obtemos um máximo para l.

2. GARCH(p,q)

Nesta linha, Bollerslev (1986) estendeu o modelo ARCH(q) desenvolvendo uma técnica para permitir que a variância condicional seja equivalente a um processo ARMA, criando o modelo Generalized ARCH(p,q) ou GARCH(p,q) ao introduzir uma média móvel ao modelo ARCH(q) autoregressivo. Neste novo modelo, a variância condicional h_t é o resultado de uma média móvel dos valores passados da própria variância condicional, o que garante a recursividade do modelo, e de um processo autoregressivo dos quadrados dos retornos. O modelo GARCH é definido por:

$$\begin{aligned}y_t &= h_t^{1/2} \varepsilon_t \\h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ \text{onde } \varepsilon_t &\sim \text{IID } N(0,1) \text{ e} \\ p &\geq 0, q > 0, \\ \alpha_0 &> 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q, \\ \beta_i &\geq 0, i = 1, \dots, p.\end{aligned} \tag{2.6}$$

O modelo GARCH(p,q) é estacionário, se e somente se, $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$.

Da mesma forma que o modelo anterior, os parâmetros desconhecidos são estimados por máxima verossimilhança.

A generalização do modelo ARCH(q), com a criação dos modelos GARCH, surge da noção de que uma estimação de um modelo ARCH(q) onde q tendesse ao infinito produziria um resultado tão bom quanto uma estimação produzida por um modelo GARCH(1,1), apenas a um custo muito superior.¹

Além disso, uma dificuldade prática advinda da estimação de um modelo ARCH(q) de ordem q muito elevada é o surgimento de parâmetros α_i negativos,² o que violaria a condição que garante ser a variância condicional não-negativa.

¹ Ver Bollerslev (1986) para demonstração.

² Ver equação (4)

Valores altos para o coeficiente β indicam que choques na variância condicional têm influência prolongada nos retornos futuros do ativo analisado, devido à recursividade introduzida pelo modelo GARCH(p,q). Por outro lado, um valor alto para o coeficiente α indicaria que a volatilidade futura reage com rapidez a movimentos de mercado que impactem o retorno presente.

3. EGARCH e TARCH

Um fato estilizado amplamente reconhecido em séries de retornos de ativos financeiros é a existência de um efeito assimetria (“*Leverage Effect*”) na distribuição da volatilidade deste tipo de dado com relação ao sinal do retorno observado. Tem-se que choques negativos no preço de um ativo financeiro tendem a produzir maiores impactos na volatilidade futura do que choques positivos; ou seja, a volatilidade tende a ser maior quando os preços estão em queda do que quando apresentam tendência de alta.

Para lidar com o efeito assimétrico dos choques na volatilidade estimada foram criados os modelos ARCH assimétricos, dentre os quais figuram o EGARCH e o TARCH aqui analisados.

O modelo EGARCH (*Exponential GARCH*), proposto por Nelson (1991), tem especificação similar a observada no modelo GARCH tradicional, descrito acima, estando a diferença exatamente na inclusão de um termo para captar o efeito assimetria, sendo o modelo definido por:

$$y_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t$$

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \left(\alpha_i \left| \frac{y_{t-i}}{h_{t-i}^{1/2}} \right| + \gamma_i \frac{y_{t-i}}{h_{t-i}^{1/2}} \right) + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i}) \quad (2.7)$$

onde $\varepsilon_t \sim \text{IID } N(0,1)$.

O efeito assimétrico dos choques negativos é captado pelos coeficientes γ_i . Se $\gamma_i < 0$ um choque negativo nos retornos irá aumentar a volatilidade, ocorrendo o oposto no caso de um choque positivo. Também vale notar que, devido à própria formulação do modelo, o efeito assimetria é tratado como sendo exponencial (observe que a especificação do modelo implica em estimar-se o logaritmo da variância condicional) e não quadrático. Daí advém o nome do

modelo (GARCH Exponencial) e a certeza de que este tipo de modelo gerará sempre previsões da variância condicional que sejam positivas e diferentes de zero, mesmo no caso de um γ_i negativo.

O modelo TARCH (*Threshold ARCH*), proposto por Zakoian (1990) e Glosten, Jagannathan e Runkle (1993), trata o efeito assimétrico via inclusão de um termo para captar assimetria ativado por uma variável dummy d_t que assume valor nulo caso y_t seja positivo e valor unitário caso y_t seja negativo. A especificação do modelo pode ser vista abaixo:

$$y_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \gamma y_{t-1}^2 d_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (2.8)$$

onde $\varepsilon_t \sim \text{IID } N(0,1)$.

Como podemos observar, no caso em que $y_t < 0$ temos que o impacto da variação do retorno na variação da volatilidade futura é dado por $\Sigma\alpha + \gamma$, enquanto no caso contrário este impacto se restringe a $\Sigma\alpha$. Ou seja, quando observamos retornos negativos a volatilidade futura tende a crescer mais do que quando observamos retornos positivos.

4. EWMA

Esta talvez seja a metodologia mais comumente utilizada na prática de finanças para a estimação e previsão da variância condicional do retorno de ativos financeiros. Desenvolvido pelo JP Morgan - RiskMetrics, neste método a variância dos retornos pode ser obtida por:

$$h_{t+1} = \lambda h_t + (1 - \lambda) r_t^2 \quad \text{dado } 0 < \lambda < 1. \quad (2.9)$$

Neste modelo, o peso dado a observações passadas é decrescente. Assim, a volatilidade reage mais rapidamente a choques no presente, tendo o efeito dos choques na volatilidade uma curta duração.

Os valores de λ utilizados são estimados pela função de perda RMSE, dada por:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{t+1}^2 - h_{t+1}(\lambda))^2} \quad (2.10)$$

Para simplificar o cálculo diário das variâncias, o manual RiskMetrics sugere o uso de um λ fixo, de 0.94 para estimativas diárias de variâncias, mas nada impede que re-estimemos o λ para cada ativo avaliado.

c) Volatilidade Realizada: um breve apanhado da teoria existente

Até este ponto nos preocupamos em propor formas de se modelar a variância condicional baseadas estritamente em modelos paramétricos. Até pouco tempo atrás, esta era a mais usual maneira de se obter estimativas e previsões da volatilidade diária de séries de retornos de ativos financeiros e, ainda hoje, estes modelos são largamente empregados.

No entanto, Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2003) sugerem que tais abordagens podem levar a estimativas viesadas da volatilidade e que uma melhor abordagem seria a utilização de dados de alta frequência tanto para a estimação da volatilidade diária dentro da amostra quanto para sua previsão fora da amostra.

Aproveitando-se da recente e cada vez maior disponibilidade de dados intradiários para ativos financeiros, Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2003) apontam que o uso de uma medida empírica de variabilidade do retorno diário, chamada de volatilidade realizada, construída a partir de uma agregação dos quadrados dos retornos intradiários, possa resultar em um melhor proxy para a variância diária do que o obtido através dos modelos acima explorados. Ao tratarem a volatilidade diária como observada, ao invés de latente, os autores conseguem simplificar sua modelagem e previsão.

Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2003) partem da suposição de que, dado um processo de retornos que não permita arbitragem e tenha uma média finita, o processo estocástico de preços, p , subsequente pertencerá à classe de semi-martingais especiais detalhada em Back(1991) podendo ser escrito como a soma de uma componente previsível, A , e um martingal, $M = (M_1, \dots, M_n)$ de tal maneira que:

$$p(t) = p(0) + A(t) + M(t), \text{ dado que } M(0) = A(0) = 0 \quad (2.11)$$

O processo referente ao retorno cumulativo do ativo, de $t = 0$ até $t = T$, será dado, então, por $r(t) = p(t) - p(0) = A(t) + M(t)$. Por tratar-se também de um semi-martingal, o processo referente ao retorno do ativo terá, associado a si, um processo de variação quadrática, o qual, por sua vez, medirá a variação dos processos relativos ao quadrado dos retornos.

Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2003) sugerem que podemos chegar à variação quadrática, por aproximação, acumulando os produtos cruzados de retornos obtidos de séries de dados de preços de alta-frequência e, quando assim obtida, a esta medida dão o nome de volatilidade realizada.

Considerando-se que o componente A do processo de retornos seja contínuo, ou seja, não represente apenas uma série saltos discretos, o processo de variação quadrática referente a este componente será zero e, portanto, conclui-se que o componente relativo à média é irrelevante para o processo de variação quadrática, estando a variabilidade exclusivamente nas inovações do processo relativo aos retornos. A variação quadrática seria, então, uma medida de volatilidade realizada ex-post constituída sem a necessidade do uso de modelos paramétricos e poderia, em si, ser tratada como um estimador não-viesado e eficiente da volatilidade do retorno, dadas as condições acima sugeridas.³

³ Para maiores esclarecimentos, ver Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2003).

III. ALGUNS RESULTADOS PARA ATIVOS BRASILEIROS

a) Dados

Obtivemos séries de dados intradiários para 5 das 10 ações mais líquidas que compõem o índice IBOVESPA, atingindo um peso global de 33,71% do índice (Ver tabela 1). Estaremos trabalhando com dados no intervalo de 01/10/2001 a 11/04/2003, compondo um total de 10.612 observações de preços, registradas a intervalos de 15 minutos, entre 10:15hs e 17:00hs ao longo de 379 dias.

Tabela 1: Composição do IBOVESPA (Ações mais líquidas)

Ibovespa Papéis					
Ranking	Código da Ação	Nome da Ação	Setor	Tamanho do Lote	Participação (%)
1	*TNLP4	TELEMAR	Tel. Fixa	1000	11.70%
2	*PETR4	PETROBRAS	Petróleo	1	9.51%
3	PLIM4	GLOBO CABO	Tecnologia	1	5.99%
4	*EBTP4	EMBRATEL PAR	Tel. Fixa	1000	4.72%
5	*BBDC4	BRADESCO	Bancário	1000	4.61%
6	TSPP4	TELESP CL PA	Tel. Celular	1000	4.37%
7	PETR3	PETROBRAS	Petróleo	1	3.73%
8	*VALE5	VALE R DOCE	Mineração	1	3.17%
9	ELET6	ELETROBRAS	Energia	1000	3.05%
10	CMIG4	CEMIG	Energia	1000	2.72%

* Ações utilizadas neste trabalho

Excluimos cotações observadas antes da abertura do mercado e após o fechamento (after-market), assim como as cotações de abertura do mercado devido à falta de liquidez constatada nestes períodos, o que poderia levar a distorções nas propriedades das séries por aspectos de microestrutura de mercado (em particular, pela possibilidade de manipulação do mercado através de “block trades”).

Mesmo eliminando-se os períodos de observação menos líquidos, obtivemos uma quantidade considerável de intervalos de 15 minutos nos quais não foi registrado nenhum negócio com os ativos aqui estudados. Nestes casos, consideramos o preço do intervalo imediatamente anterior como sendo o preço de fechamento. Na tabela abaixo, resumimos a

quantidade de intervalos de 15 minutos, por ativo estudado, nos quais não foram registrados negócios:

Tabela 2: Quantidade de “Missing Values” por ativo estudado

Ativo	Missing Values
BBDC4	791
EBTP4	776
PETR4	777
TNLP4	727
VALE 5	1456

A tabela acima nos fornece uma noção de quão líquido foi o mercado de capitais brasileiro no período analisado. Em um período de aproximadamente um ano e meio observado podemos dizer que, em média, em 8,5% dos intervalos observados não houve negócios fechados. Considerando-se que estamos lidando com cinco das dez ações mais líquidas do mercado, este é um resultado decepcionante para os defensores da liquidez de mercado.

b) Construindo Retornos Diários e a Volatilidade Realizada

A partir desta série de 10.612 observações de preços construímos nossas séries de retornos logarítmicos diários e intradiários. Considerando-se o retorno diário como sendo a variação logarítmica entre o preço de abertura e o preço de fechamento de cada dia (ou seja, o preço do primeiro negócio e o preço do último negócio realizados em cada dia observado), seja $A_{t,j}$ o preço de abertura e $F_{t,j}$, o preço de fechamento relativos ao j -ésimo intervalo de 15 minutos do dia t , o retorno relativo ao dia t , R_t , será dado por $R_t = \ln(F_{t,28}/ A_{t,1})$, onde $t = 1,2,3,\dots,379$.

Já o retorno intradiário deve ser considerado como sendo a variação logarítmica entre o preço de abertura e o preço de fechamento de cada intervalo de 15 minutos (ou seja, o preço do primeiro negócio e o preço do último negócio realizados dentro do intervalo). Desta maneira, se $R_{t,j}$ é o retorno relativo ao j -ésimo intervalo de 15 minutos do dia t , $R_{t,j} = \ln(F_{t,j}/ A_{t,j})$, onde $t = 1,2,3,\dots,379$ e $j = 1,2,\dots,28$.

Como discutimos anteriormente, a construção de medidas de volatilidade ex-post para intervalos diários pode ser obtida através do somatório dos produtos cruzados dos retornos

intradiários. Em particular, para uma análise univariada⁴, em que estamos interessados apenas na construção da série de variâncias dos retornos, ignorando as covariâncias existentes entre as séries de retornos dos diversos ativos analisados, isto significa que obteremos a volatilidade diária V_t fazendo, de uma maneira direta,

$$V_t = \sum_{j=1}^{28} R_{t,j}^2 \quad \text{onde } t=1,2,\dots,379 \quad (3.1)$$

c) Propriedades dos Retornos e da Volatilidade Realizada

Em sua análise da volatilidade diária obtida a partir de séries de retornos intradiários para Dólar Americano, Marco Alemão e Yen no mercado de câmbio à vista, Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2003) encontram três importantes regularidades empíricas que servem de arcabouço para a fundamentação do uso da volatilidade realizada como um estimador não viesado e eficiente da variância do retorno.

A primeira regularidade encontrada está no fato de, apesar de os retornos apresentarem-se claramente leptocúrticos, quando padronizados pelas correspondentes volatilidades realizadas tornam-se aproximadamente Gaussianos. A segunda regularidade é a presença de distribuições das volatilidades realizadas claramente assimétricas para a direita, embora as distribuições correspondentes ao logaritmo das volatilidades realizadas sejam aproximadamente Gaussianas. A terceira regularidade encontrada está na dinâmica de longo-prazo das volatilidades realizadas, que pode ser aproximada por um processo de memória longa fracionalmente integrado.

Em nossa análise empírica dos dados referentes aos cinco ativos aqui analisados também pudemos constatar a presença de tais regularidades, o que serve para corroborar a abordagem proposta pelos autores, baseada em um estimador para a volatilidade diária construído a partir da variância realizada.

A tabela abaixo retorna a estatística descritiva para os retornos e os retornos padronizados dos cinco ativos aqui analisados. Os retornos padronizados, $R^P(t)$, pela volatilidade realizada foram construídos de tal maneira que:

⁴ Para uma análise multivariada, ver Andersen, Bollerslev, Diebold, e Labys (2003).

$$R^p(t) = R_t \cdot V_t^{-1/2}. \quad (3.2)$$

Tabela 3: Estatística Descritiva dos Retornos

Retornos	Média	Desvio Pad.	Assimetria	Curtose	Jarque-Bera	
					Estatística	P-valor
BBDC4	-0.000042	0.023446	-0.243222	4.399944	34.686	0.000000
EBTP4	-0.004947	0.051406	-0.930026	8.429471	520.16	0.000000
PETR4	-0.000486	0.023076	-0.294373	4.482690	40.190	0.000000
TNLP4	0.000172	0.026058	-0.055343	4.063941	18.069	0.000000
VALE5	0.001675	0.019474	0.174971	3.969023	16.762	0.000000
<i>Retornos Padronizados</i>						
BBDC4	0.033438	1.191336	0.139062	2.883324	1.437	0.487602
EBTP4	-0.104864	1.224932	0.045853	2.854302	0.468	0.791348
PETR4	-0.015382	1.239970	-0.051504	3.401251	2.710	0.257940
TNLP4	0.033492	1.235873	0.021227	2.753533	0.988	0.610259
VALE5	0.137461	1.461045	-0.075933	3.189607	0.932	0.627529

Fica claro, analisando-se os dados contidos na Tabela 3, que os retornos não padronizados têm média aproximadamente zero embora apresentem alguma assimetria e curtose significativamente diferente de 3, apresentando comportamento leptocúrtico característico de séries de retornos financeiros, que em geral apresentam caudas mais largas do que o que se esperaria de uma série normalmente distribuída devido ao fato de eventos extremos ocorrerem com maior probabilidade do que o descrito pela distribuição normal.

Quando analisamos as estatísticas referentes aos retornos padronizados observa-se que o comportamento leptocúrtico se reduz, assim como assimetria, aproximando-se do que se esperaria de uma distribuição Gaussiana. Os resultados para a estatística de Jarque-Bera confirmam a aproximação a uma distribuição normal para o retorno padronizado, o que pode ser visto na Figura 1.

Adicionalmente, realizamos um teste de Kolmogorov-Smirnov para a distribuição amostral. Este tipo de estatística consiste em comparar, para cada valor potencial do retorno padronizado, a proporção de valores observados menores que o potencial com o número previsto por uma distribuição normal padrão. Para um nível de significância de 5%, a estatística do teste será 1 se pudermos rejeitar a hipótese de que os retornos padronizados têm uma distribuição normal da forma $N(0,1)$ e 0 se não pudermos rejeitar tal hipótese.

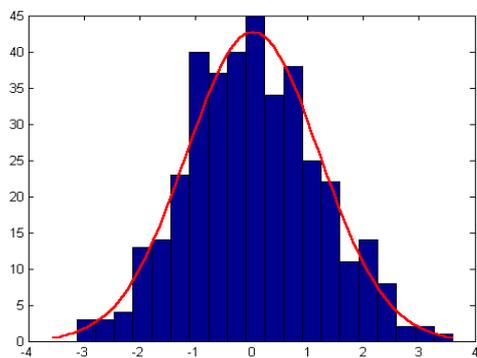
Como podemos ver pela tabela 4 abaixo, para dois dos cinco ativos aqui analisados pudemos aceitar a hipótese de que os retornos seguem uma distribuição normal padrão. Este resultado é inferior ao que poderíamos esperar, dada a primeira regularidade empírica constatada por Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2003). Realizamos, então, um teste de Lilliefors, similar à estatística de Kolmogorov-Smirnov mas menos restritivo, já que avalia a hipótese de que o retorno padronizado segue uma distribuição normal de média e variância indeterminadas, para os três ativos cujas distribuições dos retornos padronizados foram rejeitadas como seguindo a forma de uma distribuição normal padrão. A estatística do teste de Lilliefors será 1 se, ao nível de 5%, pudermos rejeitar a hipótese de que os retornos padronizados são normalmente distribuídos, e 0 se não pudermos rejeitar tal hipótese.

Como podemos observar pelos resultados apresentados na Tabela 4, para os 3 ativos testados não pudemos rejeitar a hipótese de normalidade embora possamos rejeitar a hipótese de que estes retornos seguem uma distribuição normal padrão. Estes resultados mostram que a primeira regularidade empírica aqui discutida se mantém para os retornos diários dos ativos analisados.

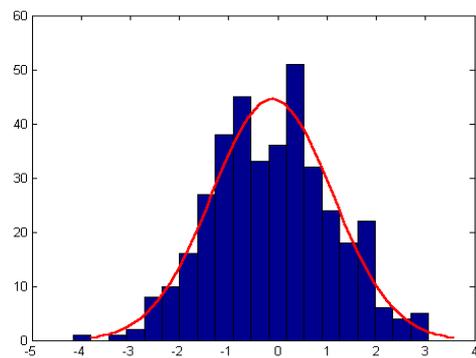
Tabela 4: Testes de “Goodness of Fit”

<i>Retornos Padronizados</i>	<i>Kolmogorov - Smirnov</i>		<i>Lilliefors</i>	
	<i>Estatística</i>	<i>P-valor</i>	<i>Estatística</i>	<i>P-valor</i>
BBDC4	0	0.066358	-	-
EBTP4	1	0.000598	0	0.197930
PETR4	1	0.001510	0	0.129690
TNLP4	0	0.532760	-	-
VALE5	1	0.000010	0	NaN*

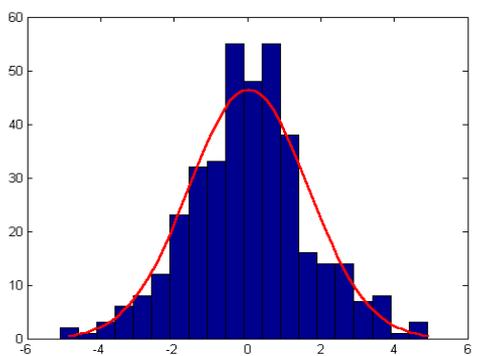
* O valor retornado pela estatística do teste está fora do alcance da tabela de Lilliefors, mas o resultado ainda é consistente.



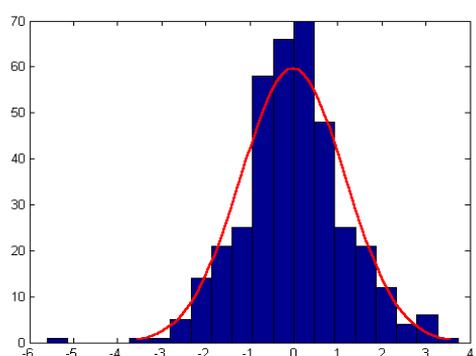
(1)



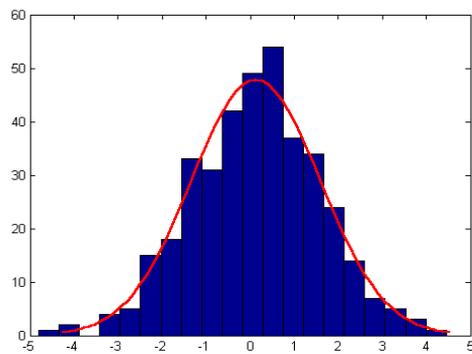
(2)



(3)



(4)



(5)

Figura 1: Histogramas dos retornos padronizados de (1) BBDC4, (2) EBTP4, (3) PETR4, (4) TNLP4, (5) VALE5 plotados contra uma distribuição normal padrão $N(0,1)$ teórica.

A Tabela 5, abaixo, contempla a estatística descritiva obtida para as estimativas de volatilidades realizadas, $V_t^{1/2}$, para cada um dos ativos analisados.

Tabela 5: Estatística Descritiva da Volatilidade Realizada

Volatilidade	Média	Desvio Pad.	Assimetria	Curtose	Jarque-Bera	
					Estatística	P-valor
BBDC4	0.019111	0.007738	1.887625	10.351830	1078.6	0.000000
EBTP4	0.037907	0.017602	2.375997	11.957090	1623.6	0.000000
PETR4	0.017650	0.007886	1.840899	7.836890	583.52	0.000000
TNLP4	0.020372	0.007220	1.009732	3.990365	79.891	0.000000
VALE5	0.013518	0.006731	2.016164	8.937067	813.40	0.000000
<i>log(Volatilidade)</i>						
BBDC4	-4.028763	0.375629	0.042866	3.551500	4.9191	0.085472
EBTP4	-3.355280	0.393243	0.428323	4.378393	41.592	0.000000
PETR4	-4.118347	0.392081	0.441220	3.305548	13.771	0.001022
TNLP4	-3.952220	0.341241	0.098473	2.858292	0.9296	0.628247
VALE5	-4.403828	0.438066	0.269816	3.446246	7.7433	0.020824

Observando o segmento superior da tabela acima, fica claro que as volatilidades realizadas para os cinco ativos analisados apresentam-se muito assimétricas e leptocúrticas, resultado este que confirma a segunda regularidade empírica proposta acima. A estatística de Jarque-Bera não deixa dúvidas de se tratar de um processo não-Gaussiano.

Em contraste com estes resultados, a parte inferior da Tabela 5, referente ao logaritmo do desvio padrão, dado por $\frac{1}{2} \cdot \text{Log}(V_t)$, sugere resultados aproximadamente Gaussianos, apresentando curtoses mais próximas de 3 e menores assimetrias. Mais uma vez, aplicamos os testes de normalidade de Kolmogorov-Smirnov e Lilliefors, agora aos logaritmos das volatilidades realizadas, a fim de testar se efetivamente tratam-se de processos Gaussianos. Os resultados podem ser vistos na Tabela 6.

Tabela 6: Testes de “Goodness of Fit” para a Volatilidade

Log(Volatilidade)	Kolmogorov - Smirnov		Lilliefors	
	Estatística	P-valor	Estatística	P-valor
BBDC4	1	0.000000	0	0.142060
EBTP4	1	0.000000	0	0.080995
PETR4	1	0.000000	1	0.040089
TNLP4	1	0.000000	1	0.045369
VALE5	1	0.000000	0	0.155920

Pudemos rejeitar, ao nível de 5%, todas as cinco estimativas de volatilidade realizada como sendo normalmente distribuídas com média 0 e variância 1.

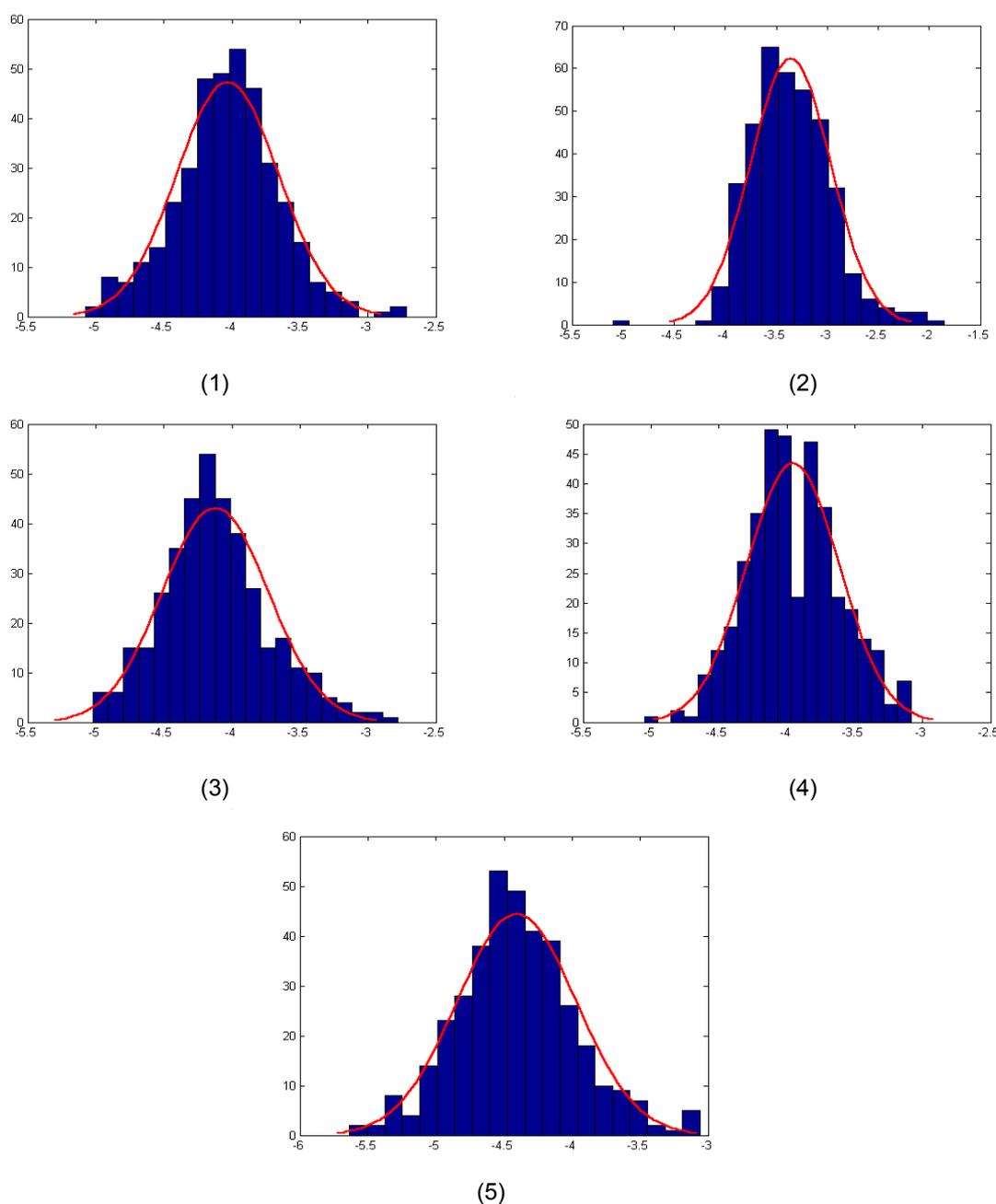


Figura 2: Histogramas dos logaritmos dos desvios padrões realizados de (1) BBDC4, (2) EBTP4, (3) PETR4, (4) TNLP4, (5) VALE5 plotados contra uma distribuição normal padrão $(N(0,1))$ teórica.

Também rejeitamos duas das cinco volatilidades realizadas no teste de Lilliefors, mais genérico, como sendo normalmente distribuídas. Ainda assim, vale lembrar que as distribuições se aproximaram bastante de uma normal com média e variância desconhecidas, como pode ser visto na Figura 2, e, mesmo nos casos em que não pudemos aceitar a hipótese de volatilidades normalmente distribuídas, observamos um p-valor alto, próximo dos 5% desejados, para o teste de Lilliefors.

Estes resultados fundamentam a proposta de Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2003), que sugerem uma abordagem Gaussiana para o problema da modelação e previsão de volatilidades realizadas.

A cerca da terceira regularidade empírica, processos de memória longa são caracterizados por decaimento hiperbólico observado na função de autocorrelação, o que indica uma persistência da autocorrelação serial observada superior ao que seria esperado de um processo ARMA, como notado inicialmente por Hurst (1951, 1957), Mandelbrot e Wallis (1968) e McLeod e Hipel (1978). A função de autocorrelação, nestes casos, exibe um nível de persistência que não é compatível nem com um processo gerador de uma série $I(0)$ nem com um processo estocástico que gere uma série $I(1)$. Segundo McLeod e Hipel (1978), genericamente, um processo y_t com função de autocorrelação ρ_j na j -ésima defasagem possuirá memória longa se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n |\rho_j| \quad (3.3)$$

for não finito. Equivalentemente, a densidade espectral $f(\omega)$ será ilimitada para baixas frequências.

Analisando-se as funções de autocorrelação dos logaritmos das volatilidades realizadas aqui apresentadas (Ver Figura 3), fica evidente a persistência de autocorrelação serial muito superior ao que se poderia esperar de uma série gerada por processo estocástico similar a um ARMA.

Processos são ditos integrados de ordem d , ou $I(d)$, se:

$$(1-L)^d y_t = u_t \text{ onde } L \text{ é operador de defasagem.} \quad (3.4)$$

Um processo de memória longa fracionalmente integrado será definido, segundo Baillie (1996), para $-0.5 < d < 0.5$ e u_t estacionário e com espectro positivo e limitado para

todas as frequências. Quando $0 < d < 0.5$, temos um processo de memória longa com autocorrelações que decaem hiperbolicamente e são sempre positivas; este será o caso do logaritmo das volatilidades realizadas⁵.

Geweke e Porter-Hudak (1983), a partir daqui GPH, sugerem um estimador semi-paramétrico para o estimador de diferenciação fracional, d , a partir da função de densidade espectral $f(\omega)$, a qual pode ser escrita como:

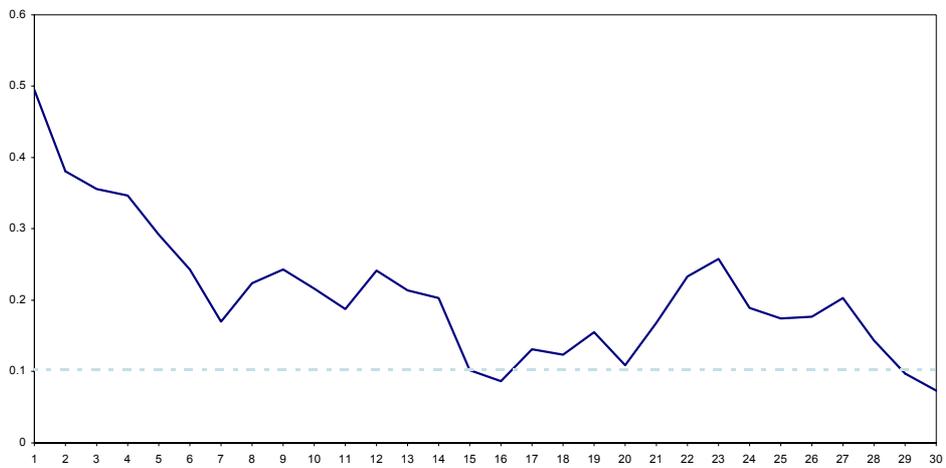
$$f(\omega) = |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} fu(\omega), \text{ para } -\pi < \omega < \pi \quad (3.5)$$

onde fu é uma função que varia lentamente, finita e superiormente limitada por zero na origem. Para uma dada série, GPH sugerem regressar o logaritmo do periodograma da série no grupo de frequências de Fourier ω_m , utilizando um grupo de frequências de Fourier próximas a zero, para a obtenção de d . O uso deste método requer a escolha de um parâmetro de truncamento $m = [n^\alpha]$ para determinar o número de observações a ser utilizado. Seguindo resultados encontrados por Hurvich, Deo e Brodsky (1998), estabelecemos $\alpha = 0.8$.

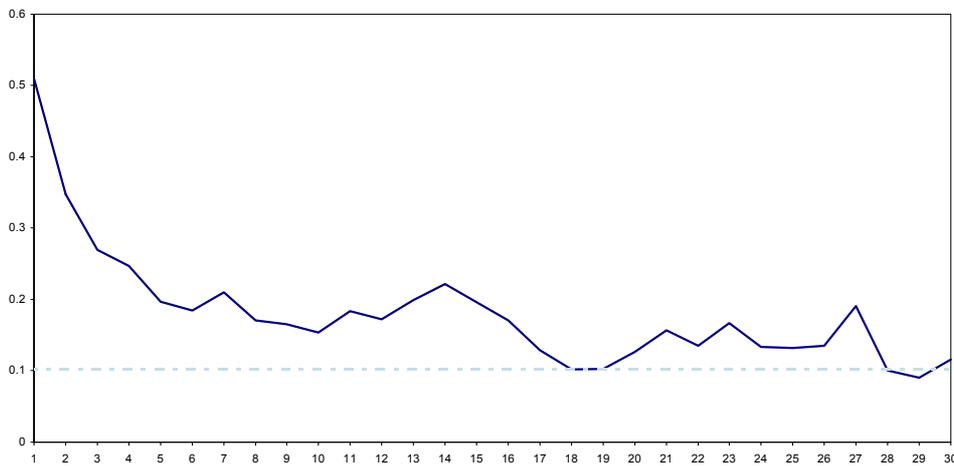
Robinson (1995) introduz o uso de um método Gaussiano semi-paramétrico para a estimação de d , baseando-se no fato de que a função log-verossimilhança negativa de um processo ARFIMA Gaussiano pode ser aproximada utilizando-se um método desenvolvido por Whittle (1953).

Portanto, na Tabela 7 reportamos estimativas do grau de diferenciação fracional seguindo os métodos GPH e Whittle semi-paramétrico para os cinco ativos aqui avaliados.

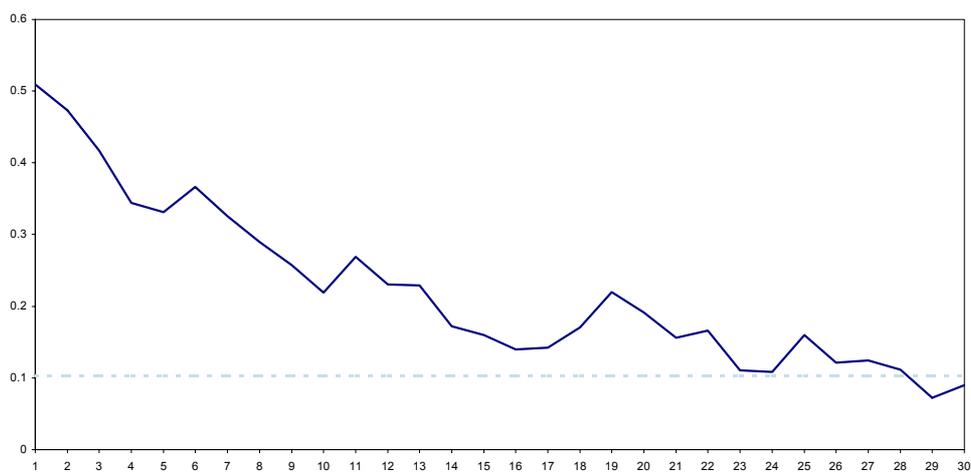
⁵ Para definições mais abrangentes de processos de memória longa, ver Baillie (1996).



(1)



(2)



(3)

Figura 3: Função de Autocorrelação Serial dos desvios padrões realizados de (1) BBDC4, (2) EBTP4, (3) PETR4.

Tabela 7: Estimativas para o Estimador de Diferenciação Fracional (d)

<i>log(Volatilidade)</i>	d^{GPH}	$d^{WHITTLE}$
BBDC4	0.3858	0.3638
EBTP4	0.3378	0.3299
PETR4	0.4597	0.4374
TNLP4	0.3598	0.3733
VALE5	0.2153	0.1795

Os resultados obtidos confirmam a suposição inicial de que a dinâmica de longo prazo do logaritmo das volatilidades realizadas pode ser aproximada por um processo de memória longa fracionalmente integrado. Tanto o estimador de Whittle quanto o GPH nos retornaram valores para d no intervalo $[0,0.5]$, característico de um processo fracionalmente integrado e os valores obtidos para os dois estimadores foram próximos para os cinco ativos analisados, garantindo a robustez de nossas estimativas. Está, portanto, comprovada a terceira regularidade empírica descrita no início desta subseção.

IV. AVALIANDO RESULTADOS PARA DIFERENTES MODELOS

O objetivo central deste trabalho é avaliar empiricamente a performance de diferentes métodos para a estimação e previsão da volatilidade de ativos financeiros e, em particular, comparar o desempenho de modelos usualmente empregados no cálculo da volatilidade, tais quais os modelos descritos na segunda seção, subitem b, com o desempenho de uma medida da volatilidade que seja essencialmente livre de qualquer modelo, tal qual a medida de volatilidade realizada, apresentada também na segunda seção deste trabalho.

Para tanto, decidimos avaliar estes métodos tanto em sua capacidade de gerar estimativas para a variância dentro da amostra, quanto em sua capacidade de gerar previsões para a volatilidade, ou seja, para a variância fora da amostra, exercício este que se mostra a cada dia mais importante para a análise empírica da volatilidade de ativos financeiros e cuja principal aplicação está na construção de intervalos de confiança para os retornos de ativos financeiros.

Prosseguimos, então, com duas abordagens diferentes quanto à avaliação do desempenho dos métodos propostos. Em um primeiro momento avaliaremos a performance dos modelos dentro da amostra, tendo como critérios resultados obtidos a partir de funções de perda e através da construção de intervalos de confiança para os retornos, a partir das estimativas da volatilidade. Posteriormente, aplicaremos estes mesmos critérios para avaliar o resultado de previsão da variância condicional.

a) Resultados Dentro da Amostra

Considerando todas as 379 observações de retornos diários contidas em nossa amostra, primeiro estimamos a variância condicional da amostra utilizando os modelos usuais discutidos na seção II.b. Agregamos a estas estimativas a variância condicional realizada, obtida pela maneira descrita na seção III. Com estes dados agregados pudemos calcular as duas funções de perda (Statistical Loss Functions) utilizadas para avaliar o desempenho dos cinco métodos aqui analisados (GARCH(1,1); EGARCH(1,1); TAR(1,1); EWMA; Variância Realizada).

Estas duas funções são a Raiz Quadrada do Erro Quadrático (RMSE – Root Mean Squared Error) e o Erro Absoluto Médio (MAE – Mean Absolute Error), ajustadas para que se possa obter funções que penalizem erros de maneira assimétrica, dado que a variância prevista é sempre positiva. O modelo com melhor desempenho é aquele que apresenta menores valores para as funções de perda. Abaixo encontram-se as equações correspondentes às duas funções de perda utilizadas.

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{t+1}^2 - h_{t+1})^2} \quad (4.1)$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |r_{t+1}^2 - h_{t+1}| \quad (4.2)$$

onde

h_t = variância;

r_t = observações dos retornos diários;

Os resultados podem ser observados na tabela abaixo. Para todos os ativos analisados a volatilidade realizada aparece como o melhor método para o cálculo da volatilidade dentro da amostra quando o critério de seleção é uma função que penaliza o erro da variância condicional estimada em relação ao quadrado do retorno diário.

Tabela 8: Funções de Perda – Dentro da Amostra

Testes 1: BBDC4					Testes 2: EBTP4				
Método	Função de Perda				Método	Função de Perda			
	RMSE	MAE	RMSE	MAE		RMSE	MAE	RMSE	MAE
GARCH (1,1)	0.000991	0.000562	% Var. Realizada 109%	113%	GARCH (1,1)	0.006849	0.002739	109%	120%
TARCH (1,1)	0.000985	0.000563	108%	113%	TARCH (1,1)	0.006853	0.002740	109%	120%
EGARCH (1,1)	0.001001	0.000563	110%	113%	EGARCH (1,1)	0.006929	0.002728	111%	119%
EWMA	0.001009	0.000593	111%	119%	EWMA	0.007252	0.003049	116%	134%
Var. Realizada	0.000911	0.000498	100%	100%	Var. Realizada	0.006261	0.002283	100%	100%
Testes 3: PETR4					Testes 4: TNLP4				
Método	Função de Perda				Método	Função de Perda			
	RMSE	MAE	RMSE	MAE		RMSE	MAE	RMSE	MAE
GARCH (1,1)	0.000972	0.000561	% Var. Realizada 108%	150%	GARCH (1,1)	0.001174	0.000686	105%	147%
TARCH (1,1)	0.000964	0.000517	107%	138%	TARCH (1,1)	0.001174	0.000657	105%	141%
EGARCH (1,1)	0.000954	0.000503	106%	135%	EGARCH (1,1)	0.001176	0.000652	105%	140%
EWMA	0.001022	0.000683	114%	183%	EWMA	0.001207	0.000532	108%	114%
Var. Realizada	0.000899	0.000374	100%	100%	Var. Realizada	0.001119	0.000467	100%	100%
Testes 5: VALE5									
Método	Função de Perda								
	RMSE	MAE	RMSE	MAE					
GARCH (1,1)	0.000655	0.000383	% Var. Realizada 101%	114%					
TARCH (1,1)	0.000653	0.000385	101%	115%					
EGARCH (1,1)	0.000656	0.000380	101%	113%					
EWMA	0.000662	0.000397	102%	118%					
Var. Realizada	0.000649	0.000335	100%	100%					

No entanto, tal resultado pode ser pouco elucidativo, já que o quadrado do retorno diário pode não ser o melhor proxy para a variância condicional observada. Sabemos que, por construção e dada a validade empírica de todas as suposições que fizemos a cerca das propriedades distributivas da volatilidade realizada, esta seria uma aproximação muito mais precisa da real variância condicional do que o quadrado do retorno observado no dia.

Propomos, então, que se use a variância realizada, ao invés do quadrado do retorno, como um proxy para a variância condicional da amostra nas funções de perda, que passariam a ser escritas como:

$$\text{RMSE}^{\text{VR}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (V_{t+1} - h_{t+1})^2} \quad (4.3)$$

$$\text{MAE}^{\text{VR}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |V_{t+1} - h_{t+1}| \quad (4.4)$$

onde

h_t = variância condicional estimada pelo modelo;

V_t = volatilidade realizada.

Os resultados para as novas funções de perda podem ser vistos na Tabela 9. O ajuste dos modelos parece melhor, já que as funções de perda retornam valores inferiores aos obtidos com as funções originais. Além disto, não notamos nenhuma diferença já que os resultados para os quatro modelos continuam muito próximos para os cinco ativos estudados.

Dentre os cinco métodos estudados, excluindo-se a volatilidade realizada, os modelos EGARCH(1,1) e TAR(1,1) parecem retornar as melhores estimativas para a variância condicional dentro da amostra e o modelo EWMA parece retornar as piores estimativas.

Passemos, então, ao passo seguinte em nossa avaliação dos diversos métodos disponíveis para estimação da variância condicional diária: a construção de intervalos de confiança.

Tabela 9: Funções de Perda (Modificadas) – Dentro da Amostra

Testes 1: BBDC4			Testes 2: EBTP4		
Método	Função de Perda		Método	Função de Perda	
	RMSE	MAE		RMSE	MAE
GARCH (1,1)	0.000372	0.000243	GARCH (1,1)	0.002055	0.001283
TARCH (1,1)	0.000360	0.000245	TARCH (1,1)	0.002052	0.001283
EGARCH (1,1)	0.000430	0.000272	EGARCH (1,1)	0.001859	0.001237
EWMA	0.000392	0.000263	EWMA	0.002560	0.001581
Testes 3: PETR4			Testes 4: TNLP4		
Método	Função de Perda		Método	Função de Perda	
	RMSE	MAE		RMSE	MAE
GARCH (1,1)	0.000382	0.000274	GARCH (1,1)	0.000359	0.000307
TARCH (1,1)	0.000389	0.000279	TARCH (1,1)	0.000357	0.000306
EGARCH (1,1)	0.000374	0.000271	EGARCH (1,1)	0.000359	0.000306
EWMA	0.000528	0.000435	EWMA	0.000372	0.000284
Testes 5: VALE5					
Método	Função de Perda				
	RMSE	MAE			
GARCH (1,1)	0.000304	0.000233			
TARCH (1,1)	0.000308	0.000234			
EGARCH (1,1)	0.000315	0.000237			
EWMA	0.000339	0.000260			

Com a volatilidade (variância condicional) gerada por cada método, construímos intervalos de confiança para os retornos diários com níveis de significância de 5% da tabela de distribuição Normal(0,1), seguindo o modelo descrito abaixo:

$$\hat{y}_t = \mu \pm \alpha \times \sqrt{h_t} \quad (4.5)$$

onde

\hat{y}_t = intervalo de confiança;

μ = média;

α = nível de significância;

h_t = variância condicional.

Os resultados obtidos para cobertura podem ser vistos na Tabela 10 abaixo e na Figura 4. Note que acrescentamos, além dos cinco métodos aqui avaliados, a cobertura correspondente a um intervalo construído com a variância incondicional da série, como uma referência para comparação. Há, também, duas estatísticas para o modelo EWMA. A primeira delas corresponde ao modelo calculado com $\lambda = 0.94$ e a segunda corresponde ao modelo estimado com λ sendo re-calculado para cada ativo.

A estatística referente ao Teste de Cobertura reporta o percentual de pontos do retorno observado que ficaram no interior do intervalo. Ou seja, para um intervalo com nível de significância de 5%, é desejável que no máximo 5% dos pontos estejam fora do intervalo, o que nos levaria a supor que 97.5% dos retornos observados deveriam estar abaixo da cobertura superior do intervalo, o oposto ocorrendo para a cobertura inferior.

A volatilidade realizada, neste teste, aparece como o pior método, gerando coberturas inferiores a 97.5% para todos os ativos, tanto para a cobertura superior quanto para a inferior. Podemos inferir deste resultado e da Figura 4 abaixo que apesar de gerar um melhor ajuste em momentos de pouca volatilidade, o método da volatilidade realizada subestima a variância observada em momentos de stress, em que a volatilidade aumenta muito rapidamente. Choques na volatilidade são melhor modelados pelos modelos usuais, o que pode justificar seu uso amplo na prática de finanças, já que metodologias comumente utilizadas tal qual Value-at-Risk (VaR) e similares preocupam-se em avaliar e limitar perdas em situações extremas.

Este pior desempenho da volatilidade realizada ao modelar situações de aumento excessivo na variância condicional, em que há choques de volatilidade, pode ser consequência da mesma regularidade empírica que utilizamos para sustentar o uso de uma medida de volatilidade realizada em substituição a modelos mais complexos e que considerassem processos não Gaussianos. A segunda regularidade empírica, apresentada na seção II deste trabalho, e que comprovamos estar presente nos ativos aqui estudados, propunha uma distribuição Normal para a volatilidade realizada, quando na verdade estamos observando que

eventos extremos de volatilidade ocorrerem com maior probabilidade do que o descrito pela distribuição normal, ou seja, a distribuição da volatilidade também deve contemplar o comportamento leptocúrtico observado na distribuição dos retornos, evidenciado através da presença de caudas mais gordas do que as observadas em uma distribuição normal padrão.

O que observamos é que a distribuição do logaritmo das variâncias condicionais estimadas pelos modelos usuais é fortemente leptocúrtica, ao contrário do observado empiricamente para a distribuição do logaritmo das volatilidades realizadas.

Vale ressaltar que nenhum dos modelos aqui tratados obteve um resultado de cobertura que possa ser considerado bom. Quando comparados ao benchmark da variância incondicional, os modelos da família ARCH mostraram-se apenas marginalmente superiores, apresentando pior cobertura do que o benchmark em três dos cinco ativos analisados.

O modelo EWMA saiu-se pior que os modelos da família ARCH e só obteve cobertura superior à obtida pelo benchmark em um dos cinco ativos. Tanto EWMA quanto os modelos ARCH parecem superestimar a volatilidade em momentos de “calmaria”, o que não ocorre com a volatilidade realizada.

Tabela 10: Testes de Cobertura – Dentro da Amostra

Testes de Cobertura

BBDC4		
	Cobertura Superior	Cobertura Inferior
Var. Incondicional	97.09%	97.35%
Volat. Realizada	90.48%	96.56%
GARCH(1,1)	96.30%	97.35%
TARCH(1,1)	96.03%	97.62%
EGARCH(1,1)	96.30%	97.62%
EWMA	95.77%	96.83%
EWMApv	95.77%	96.83%

EBTP4		
	Cobertura Superior	Cobertura Inferior
Var. Incondicional	98.15%	96.83%
Volat. Realizada	91.01%	95.77%
GARCH(1,1)	97.62%	96.83%
TARCH(1,1)	97.62%	96.83%
EGARCH(1,1)	97.88%	97.09%
EWMA	97.88%	95.77%
EWMApv	96.03%	92.86%

PETR4		
	Cobertura Superior	Cobertura Inferior
Var. Incondicional	97.88%	97.35%
Volat. Realizada	94.71%	94.44%
GARCH(1,1)	98.15%	96.56%
TARCH(1,1)	97.62%	96.56%
EGARCH(1,1)	97.88%	96.30%
EWMA	97.62%	97.62%
EWMApv	98.41%	98.41%

TNLP4		
	Cobertura Superior	Cobertura Inferior
Var. Incondicional	97.88%	96.56%
Volat. Realizada	93.65%	95.77%
GARCH(1,1)	97.88%	96.30%
TARCH(1,1)	97.88%	96.30%
EGARCH(1,1)	97.88%	96.30%
EWMA	95.50%	93.39%
EWMApv	95.50%	93.12%

VALE5		
	Cobertura Superior	Cobertura Inferior
Var. Incondicional	97.08%	98.67%
Volat. Realizada	89.92%	90.45%
GARCH(1,1)	96.29%	97.61%
TARCH(1,1)	96.55%	97.88%
EGARCH(1,1)	96.82%	97.35%
EWMA	97.08%	97.88%
EWMApv	97.35%	97.88%

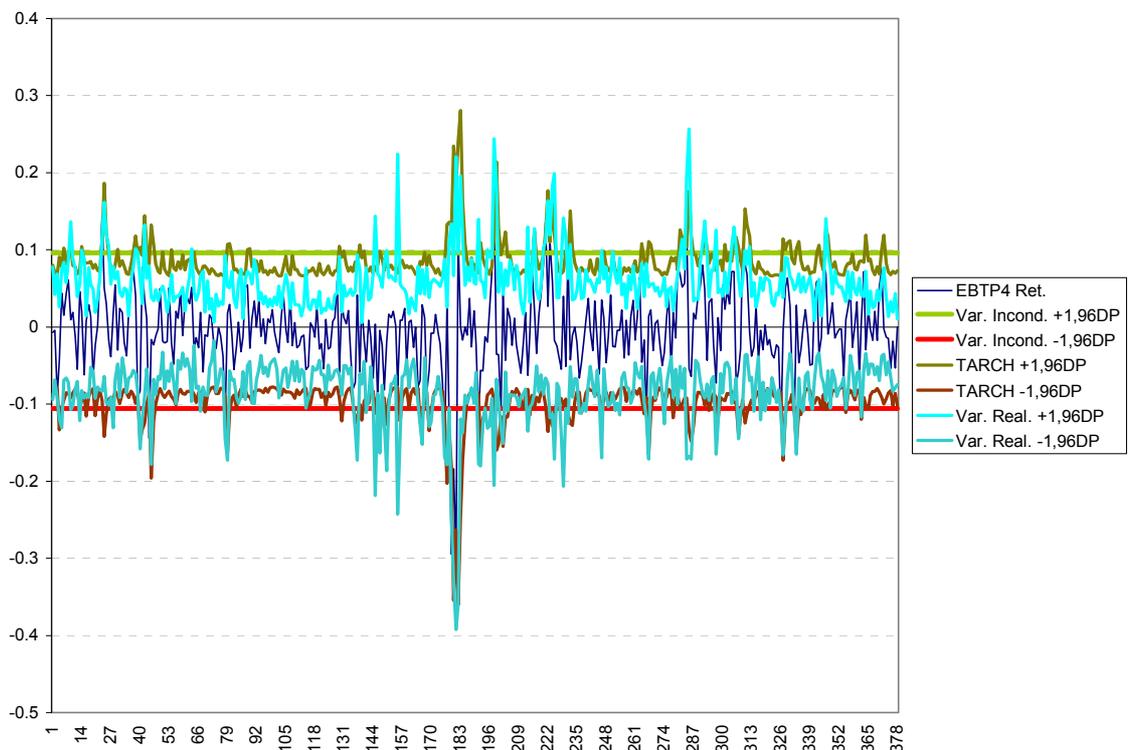


Figura 4: Intervalos de Confiança – Dentro da Amostra

b) Resultados de Previsão

Vistos os resultados para dentro da amostra, nos voltamos agora para a capacidade dos diversos métodos de gerar previsões para a volatilidade do retorno de ativos financeiros um passo a frente. Estaremos interessados, agora, em avaliar a capacidade preditiva das metodologias aqui propostas e, para tanto, utilizaremos critérios similares aos explorados na avaliação da performance dos modelos dentro da amostra.

Novamente utilizaremos as duas funções de perda (RMSE e MAE) propostas no subitem anterior, além do teste de cobertura para avaliar o desempenho das cinco metodologias aqui propostas na geração de previsões para a volatilidade.

Gerar previsões para a volatilidade de retornos um passo a frente é um processo trivialmente obtido para os modelos da família ARCH e para o EWMA, bastando, para tanto gerar uma nova variância condicional, a partir dos modelos, a cada novo conjunto de

informação adicional que se torna disponível, ou seja, a cada nova observação de retorno, mantendo fixos os parâmetros previamente estimados dentro da amostra.

Uma questão mais interessante envolve a geração de previsões a partir da volatilidade realizada. Em um primeiro momento, pode parecer algo trivial a geração de previsões baseadas na volatilidade realizada, sendo apenas necessário considerá-la como observada para o período amostral, o que sugeriria a estimação de um modelo ARMA para o período observado e a posterior geração das previsões a partir deste.

Esta percepção, no entanto, é enganosa. Lembremo-nos da terceira regularidade empírica constatada na terceira seção deste trabalho: a volatilidade realizada de retornos financeiros é um processo de memória longa, fracionalmente integrado. Portanto, o uso de um modelo da classe ARIMA produziria estimações viesadas da volatilidade futura devido à longa memória do processo, relativa à persistência das autocorrelações, a qual necessitamos filtrar para gerar previsões um passo a frente.

Na verdade, a abordagem mais comum para modelagem de processos de memória longa é a utilização de modelos da classe AR(FI)MA, propostos inicialmente por Hosking (1981) e por Granger e Joyex (1980), tratando-se de uma generalização dos modelos ARIMA, de tal modo que, para:

$$\Phi(L)(1-L)^d Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t \quad (4.6)$$

onde L é o operador de defasagem e ε_t é um ruído branco, permite-se que o parâmetro de integração d seja um valor não inteiro.

Aqui, trabalharemos com um modelo de Volatilidade Estocástica de Memória Longa, ou LMSV, como o proposto por Breidt, Crato e Lima (1998) para a previsão da volatilidade realizada um passo a frente. O LMSV é construído incorporando-se um processo ARFIMA a um modelo de volatilidade estocástica tradicional, tal qual:

$$\begin{aligned} y_t &= \sigma_t \xi_t; \\ \sigma_t &= \sigma \exp(v_t / 2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde v_t é independente de ξ_t e ξ_t é i.i.d. com média zero e variância um. $\{v_t\}$ é um modelo ARFIMA e σ_t^2 é a variância realizada. A série a ser analisada, após a transformação em um processo estacionário é dada por:

$$x_t \equiv \log(\sigma_t^2 \xi_t^2) = \mu + v_t + \varepsilon_t \quad (4.8)$$

onde $\mu = \log(\sigma^2) + E[\log(\xi_t^2)]$ e $\varepsilon_t = \log(\xi_t^2) - E[\log(\xi_t^2)]$.

Para a estimação do parâmetro de memória d , utilizaremos um método de estimação paramétrico, similar ao método Whittle exposto na seção anterior a esta, com a diferença de que agora não estaremos mais fornecendo o número de observações amostrais a serem utilizadas na obtenção de d , mas sim os parâmetros p e q do modelo ARFIMA(p,d,q). Evitamos a perda de generalidade que poderia advir de um método paramétrico, já que estamos sugerindo ser a volatilidade estocástica uma medida livre de modelos, determinando os parâmetros p e q a partir da utilização do critério de informação introduzido por Schwarz (1978), mais conhecido como critério SBIC. Fazemos isto estimando diversos modelos ARFIMA(p,d,q), variando os parâmetros p e q , e selecionando aquele que apresentar o menor critério de informação.

Esclarecidos os diversos métodos utilizados na previsão das volatilidades, um passo a frente, dos retornos dos cinco ativos brasileiros aqui estudados, passemos aos resultados.

Para a estimação dos diversos modelos explorados foi estabelecido um período amostral de 300 dias e foram realizadas previsões, um dia à frente, para 79 dias. Os resultados podem ser vistos nas duas tabelas abaixo.

Fica claro, mais uma vez, que as metodologias avaliadas produzem resultados muito similares em termos de ajuste avaliado pelas funções de perda. A grande diferença a se notar entre os resultados fora da amostra e dentro da amostra é que, em se tratando de previsão, a volatilidade realizada já não gera os melhores resultados para as funções de perda. Como podemos observar pelos resultados apresentados na Tabela 11 abaixo, a medida de variância prevista pelo EWMA, estimado usando-se o peso padrão de 0.94, sai-se melhor que a volatilidade realizada em termos de erro medido em relação ao quadrado do retorno observado pela função RMSE para todos os ativos aqui analisados.

O EWMA parece fornecer o melhor ajuste em termos de resultados por RMSE. Os resultados obtidos por MAE parecem pouco elucidativos e, em sua maior parte, ainda indicam um melhor ajuste por parte das previsões de volatilidade realizada.

A Tabela 12 fornece os resultados relativos à cobertura obtida pelos intervalos de confiança construídos a partir das previsões de volatilidade produzidas pelas cinco

metodologias aqui estudadas. Mais uma vez, o intervalo construído com as previsões de volatilidade realizada mostra a pior cobertura dentre as cinco metodologias analisadas. Os intervalos construídos a partir de estimativas de volatilidade geradas pelo modelo EWMA parecem melhores do que os resultados obtidos para dentro da amostra (desta vez só utilizamos estimativas da volatilidade geradas a partir de um modelo EWMA com λ fixo e igual a 0.94 devido ao ajuste inferior obtido com o uso de λ variável).

Nossa conclusão mais uma vez apóia o uso de modelos da família ARCH para a modelagem da volatilidade medida para séries de retornos financeiros. Também fora da amostra estes modelos geraram estimativas de variância que permitiram a construção dos intervalos que apresentaram melhor cobertura.

Tabela 11: Funções de Perda – Fora da Amostra

Testes 1: BBDC4					Testes 2: EBTP4				
Método	Função de Perda				Método	Função de Perda			
	RMSE	MAE	RMSE	MAE		RMSE	MAE	RMSE	MAE
GARCH (1,1)	0.000593	0.000441	% Var. Realizada 98%	120%	GARCH (1,1)	0.002980	0.001993	% Var. Realizada 25%	28%
TARCH (1,1)	0.000587	0.000428	97%	116%	TARCH (1,1)	0.002976	0.001981	25%	28%
EGARCH (1,1)	0.000590	0.000428	98%	116%	EGARCH (1,1)	0.002973	0.002048	25%	29%
EWMA	0.000590	0.000423	98%	115%	EWMA	0.002912	0.002090	24%	29%
Var. Realizada	0.000605	0.000369	100%	100%	Var. Realizada	0.012067	0.007125	100%	100%
Testes 3: PETR4					Testes 4: TNLP4				
Método	Função de Perda				Método	Função de Perda			
	RMSE	MAE	RMSE	MAE		RMSE	MAE	RMSE	MAE
GARCH (1,1)	0.000763	0.000606	% Var. Realizada 96%	112%	GARCH (1,1)	0.000657	0.000546	% Var. Realizada 102%	130%
TARCH (1,1)	0.000759	0.000565	95%	104%	TARCH (1,1)	0.000656	0.000546	102%	130%
EGARCH (1,1)	0.000752	0.000568	94%	105%	EGARCH (1,1)	0.000664	0.000553	103%	132%
EWMA	0.000742	0.000585	93%	108%	EWMA	0.000619	0.000494	96%	118%
Var. Realizada	0.000797	0.000542	100%	100%	Var. Realizada	0.000646	0.000419	100%	100%
Testes 5: VALE5									
Método	Função de Perda								
	RMSE	MAE	RMSE	MAE					
GARCH (1,1)	0.000324	0.000276	% Var. Realizada 100%	135%					
TARCH (1,1)	0.000354	0.000308	109%	151%					
EGARCH (1,1)	0.000331	0.000274	102%	134%					
EWMA	0.000312	0.000246	96%	120%					
Var. Realizada	0.000323	0.000204	100%	100%					

Tabela 12: Testes de Cobertura – Fora da Amostra

Testes de Cobertura

BBDC4		
	Cobertura Superior	Cobertura Inferior
Volat. Realizada	87.18%	98.72%
GARCH(1,1)	96.15%	100.00%
TARCH(1,1)	94.87%	100.00%
EGARCH(1,1)	94.87%	100.00%
EWMA	93.59%	100.00%

EBTP4		
	Cobertura Superior	Cobertura Inferior
Volat. Realizada	93.59%	97.44%
GARCH(1,1)	97.44%	98.72%
TARCH(1,1)	97.44%	98.72%
EGARCH(1,1)	97.44%	98.72%
EWMA	96.15%	94.87%

PETR4		
	Cobertura Superior	Cobertura Inferior
Volat. Realizada	91.03%	92.31%
GARCH(1,1)	93.59%	97.44%
TARCH(1,1)	93.59%	96.15%
EGARCH(1,1)	93.59%	96.15%
EWMA	98.72%	100.00%

TNLP4		
	Cobertura Superior	Cobertura Inferior
Volat. Realizada	91.03%	93.59%
GARCH(1,1)	100.00%	98.72%
TARCH(1,1)	100.00%	98.72%
EGARCH(1,1)	100.00%	98.72%
EWMA	97.44%	97.44%

VALE5		
	Cobertura Superior	Cobertura Inferior
Volat. Realizada	93.51%	85.71%
GARCH(1,1)	100.00%	98.70%
TARCH(1,1)	100.00%	98.70%
EGARCH(1,1)	100.00%	98.70%
EWMA	100.00%	100.00%

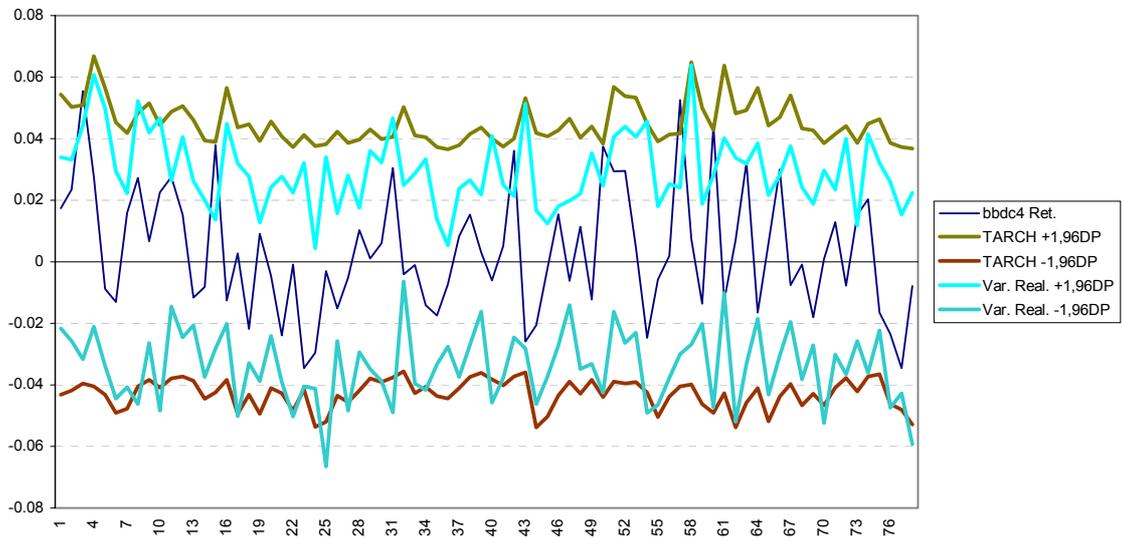


Figura 5: Intervalos de Confiança – Fora da Amostra

Observando a Figura 5 acima, fica claro o motivo da primazia dos modelos da família ARCH. Também na previsão esta classe de modelos tende a gerar estimativas superestimadas da volatilidade enquanto a medida de volatilidade realizada continua a subestimar a volatilidade amostral.

V. CONCLUSÃO

Recapitulando os principais resultados até aqui obtidos, estabelecemos na seção 3 deste trabalho três regularidades empíricas verificadas para as medidas de volatilidade realizada dos retornos obtidas para os cinco ativos aqui estudados. Primeiro, estabelecemos que os retornos dos ativos padronizados pelas suas medidas de volatilidades realizadas são aproximadamente Gaussianos. Segundo, estabelecemos que, apesar das distribuições das volatilidades realizadas serem assimétricas, as distribuições dos logaritmos das volatilidades realizadas são aproximadamente Gaussianas. A terceira regularidade empírica encontrada foi a presença de processos de memória longa fracionalmente integrados nos logaritmos das volatilidades realizadas.

A partir destas três regularidades e motivados pelo arcabouço teórico desenvolvido em Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2003) propusemos a metodologia da volatilidade realizada como uma opção livre de modelos para o tratamento da volatilidade de cinco ativos financeiros brasileiros. Testando o desempenho desta metodologia contra outras metodologias usualmente empregadas na modelagem da variância de retornos de ativos financeiros, não pudemos encontrar evidências claras que sustentem o uso da volatilidade realizada em substituição a tais metodologias baseadas em modelos paramétricos.

Para os resultados referentes ao período amostral, constatamos que a volatilidade realizada mostra-se mais aderente aos movimentos do retorno em momentos de baixa volatilidade mas tende a não acompanhar choques de volatilidade, que provoquem aumentos repentinos na variabilidade dos retornos diários. Este problema pode ser atribuído ao próprio formato da distribuição da volatilidade realizada, que segundo pudemos investigar, se aproxima de uma normal padrão, com curtose próxima a 3.

Na verdade, a própria suposição de normalidade que nos permite sugerir a utilização da volatilidade realizada como um proxy da variância do retorno de ativos financeiros pode estar induzindo a geração de intervalos de confiança que não cubram movimentos extremos do retorno, o que nos levaria a propor uma distribuição mais leptocúrtica para a variância ex-post, dado que eventos extremos parecem ser mais comuns do que o previsto por uma distribuição normal padrão.

Quanto à capacidade preditiva da volatilidade realizada, vale fazer uma ressalva aos resultados encontrados para a volatilidade realizada prevista fora da amostra. Ao estimarmos o modelo LMSV, utilizado para gerar previsões da variância um passo a frente a partir da volatilidade realizada computada dentro da amostra, não modelamos o sinal de ε_t , que consideramos i.i.d. $(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Breidt, Crato e Lima (1998) ao estimarem σ_ε^2 encontraram resultados consideravelmente superiores aos encontrados para a própria variância modelada inicialmente. Caso isto se confirme para os dados aqui utilizados, poderíamos obter ajustes significativamente superiores modelando também o sinal do ruído branco. Fica a sugestão para futuros trabalhos a serem desenvolvidos.

VII. BIBLIOGRAFIA

Akaike, H., *A New Look at the Statistical Model Identification*, IEEE Transactions on Automatic Control, 19 (1974), 716-723.

Andersen, T.G., T. Bollerslev, F.X. Diebold and P. Labys (2001), "The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility," Journal of the American Statistical Association, in press.

Andersen, T.G., T. Bollerslev, F.X. Diebold and P. Labys (2003), "Modeling and Forecasting Realized Volatility," Econometrica 71, No. 2, 579-625.

Back, K. (1991), "Asset Prices for General Processes," Journal of Mathematical Economics, 20, 317-395.

Baillie, R.T. (1996), Long-Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics. Journal of Econometrics 73, 5-59.

Bollerslev, T.P., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Econometrics, 31 (1986), 309-28.

Bollerslev, T.P., Chou, R.Y., Kroner, K.F., *ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence*, Journal of Econometrics, 52 (1992), 5-59.

Breidt, F.J., Crato, N. e Lima, P. (1998) "The Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility." J. of Econometrics 83, 325-348.

Brooks, C., Burke, S.P., Persaud, G., *Benchmarks and the Accuracy of GARCH Model Estimation*, International Journal of Forecasting, 17 (2001), 45-56.

Engel, R.F., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation*, Econometric Reviews, 5 (1982) 1-50.

Geweke, J. and S. Porter-Hudak (1983), "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," Journal of Time Series Analysis, 4, 221-238.

Glosten, L.R., R. Jagannathan, and D. Runkle (1993) "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Normal Excess Return on Stocks," Journal of Finance, 48, 1779–1801.

Godfrey, L.G., *Misspecification Tests in Econometrics*, Cambridge University Press (1988).

- Granger, C.W.G, Joyex, R. (1980)**, “An introduction to long-memory time series models.” *J. of Time Series Analysis* 1, 15-29.
- Hosking, J. (1981)**, “Fractional Differencing.” *Biometrika*, Vol. 68, No. 1, 165-176.
- Hurst, H.E. (1951)**, Long-term storage capacity of reservoirs, *Proceedings of the Institute of Civil Engineers* 116, 770-799.
- Hurst, H.E. (1957)**, A suggested statistical model of some time series that occur in nature, *Nature* 180, 494.
- Hurvich, C. M., Deo, R. S., and Brodsky, J. (1998)**. The mean squared error of Geweke and Porter-Hudak’s estimator of the memory parameter of a long memory time series, *Journal of Time Series Analysis*, 19: 19–46.
- McLeod, A.I. and K.W. Hipel (1978)**, Preservation of the rescaled adjusted range, 1: A reassessment of Hurst phenomenon, *Water Resource Research* 14, 491-508.
- Mandelbrot, B.B. and J. Walles (1968)**, Noah, Joseph and operational hydrology, *Water Resources Research* 4, 909-919.
- Nelson, Daniel B. (1991)**, “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 59, 347–370.
- RiskMetrics – Technical Document**, Morgan Guaranty Trust Company – 4th Edition (1996).
- Robinson, P. M. (1995)**. Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. *Annals of Statistics* 23, 1630–1661.
- Schwarz, G., Estimating the Dimension of a Model**, *Annals of Statistics*, 6 (1978), 461-464.
- Soares, L.J., Medeiros, M.C., Estimação do λ Ótimo para Previsão da Volatilidade Através da Metodologia RiskMetrics™ para Ativos do Mercado Financeiro Brasileiro**, *Investigação Operacional*, 18 (1998), 207-213.
- Souza, L.R. (2003)**, “The aliasing effect, the Fejer Kernel and temporally aggregated long memory processes.” *Ensaio Econômicos – EPGE*, No.470.
- White, H., A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity**, *Econometrica*, 48 (1980), 817-838.
- Whittle, P. (1951)**, “Hypothesis Testing in Time Series Analysis.” Hafner, New York.

Zakoian, J.M. (1990), “Threshold Heteroskedastic Models,” manuscript, CREST, INSEE, Paris.