

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

**ANÁLISE DA EFICIÊNCIA DO MODELO DE BLACK AND SCHOLES PARA O  
APREÇAMENTO DE OPÇÕES NO MERCADO DA BOVESPA**

Marcel Scharth Figueiredo  
Matrícula: 0015662-9

Orientador: Walter Novaes

Dezembro de 2003

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

**ANÁLISE DA EFICIÊNCIA DO MODELO DE BLACK AND SCHOLES PARA O  
APREÇAMENTO DE OPÇÕES NO MERCADO DA BOVESPA**

Marcel Scharth Figueiredo

Matrícula: 0015662-9

Orientador: Walter Novaes

**Dezembro de 2003**

Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realizá-lo, a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor tutor.

---

Marcel Scharth Figueiredo

*As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor.*

# Índice

***1. Introdução, 4***

***2. O mercado de Opções de Compra da Bovespa,7***

*2.1 Amostra e Importância do Mercado,7*

*2.2 Tipos de Opções,9*

*2.3 Ações-Objeto,10*

*2.4 Prazos de Vencimento,14*

*2.5 Moneyness,16*

*2.6 Comparando diferentes contratos,20*

***3. Análise das Volatilidades Implícitas,25***

***4. Análise de Apreçamento,42***

***5. Conclusões, 50***

***Referências, 53***

# **Análise da Eficiência do Modelo de Black and Scholes para o Apreçamento de Opções no Mercado da Bovespa**

## **1. Introdução**

O modelo de Black and Scholes (Black e Scholes, 1973) é possivelmente o maior sucesso da literatura mundial em derivativos financeiros até os dias atuais. Dentro de uma perspectiva histórica, é possível argumentar que a consolidação do instrumental teórico para o cálculo de opções desenvolvido pelos autores no início da década de 70 constituiu um impulso inequívoco para o crescimento exponencial do mercado de derivativos a partir daquele período. Anteriormente, as importantes dificuldades teóricas em se modelar os preços de mercado ainda configuravam um entrave fundamental ao desenvolvimento das operações com opções, que eram negociadas apenas em mercados de balcão (*over-the-counter markets*),<sup>1</sup> com volumes diminutos de transações.

Desde a época de publicação do artigo clássico de Black e Scholes, diversos estudos encontraram evidências amplamente favoráveis à consistência do modelo frente aos preços de mercado reportados, admitindo-se margens de erro restritas e gerenciáveis. Não obstante, também é reconhecido que o referencial teórico não está livre de algumas anomalias quando aplicado aos mercados. Rubinstein (1994), por exemplo, examina os contratos de opções sobre o índice S&P 500 e apresenta evidências que mostram que, contrariamente ao suposto no modelo de Black and Scholes, a volatilidade dos retornos das ações não é constante. Esta anomalia é amplamente documentada pela literatura empírica, sendo tradicionalmente referida como sorriso de volatilidade (*volatility smile*, Rubinstein, 1985).<sup>2</sup> O modelo de Black and Scholes, portanto, não encerra a busca por métodos eficientes de apreçamento de opções.

O presente trabalho possui dois objetivos. O primeiro deles é documentar quais ações compõem o mercado de opções de compra da Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), caracterizando os volumes financeiros de negociação por parâmetros dos

---

<sup>1</sup> Modalidade de mercado em que os parâmetros do contrato são estabelecidos entre as partes negociantes, ao invés de especificados *à priori*.

<sup>2</sup> Ressalta-se, entretanto, que tal expressão foi cunhada antes do *crash* da bolsa de Nova York em 1987 e não é mais adequada às estruturas observadas desde então no mercado americano na sua forma original (Rubinstein, 1994, e Dumas, Fleming e Whaley, 1998).

contratos como prazos de expiração e preços de exercício. O segundo objetivo é investigar a eficácia do modelo de Black and Scholes no apreçamento das opções observadas. Em particular, a análise busca determinar as tendências de sobre ou sub apreçamento do modelo de Black and Scholes na amostra, relacionando-as estatisticamente com fatores tais como liquidez, preços de exercício, riscos sistemáticos das ações e prazos de vencimento.

O trabalho mostra que mais de 90% do mercado de opções é concentrado em apenas três ações no período em estudo, e que somente três contratos de opções representam 70% dos volumes diários das transações. Mais precisamente, a absoluta maioria dos negócios (mais de 85%) vem se consolidando nos últimos três anos em torno das ações da Telemar, que tornaram-se as mais líquidas do mercado à vista após a privatização da Telebrás. Mostra-se ainda que o mercado é constituído basicamente por opções que podem ser exercidas a qualquer momento (americanas) e com até sessenta dias corridos para o vencimento.

O estudo está organizado da seguinte maneira. A seção seguinte apresenta descritivamente a base de dados utilizada, identificando as opções mais relevantes e o nível de liquidez do mercado em geral. A terceira parte destaca os aspectos teóricos mais importantes do modelo Black and Scholes, desempenhando uma primeira análise acerca das volatilidades implícitas das opções da Bovespa. A quarta seção discute a metodologia implementada para testar a eficácia do modelo de B&S na amostra, prosseguindo com a exposição e avaliação dos resultados obtidos. O capítulo final destina-se às conclusões do trabalho.

## **2. O Mercado de Opções de Compra de Ações da Bovespa**

No Brasil, as operações com opções de ações foram introduzidas pela Bolsa de Valores de São Paulo no final dos anos 70. Durante a década de 80, as opções sobre ações também foram negociadas na Bolsa de Valores do Rio de Janeiro, onde chegavam a constituir quase 50% de todo o volume financeiro. Após a quebra desta última em 1989, a Bovespa passou a concentrar integralmente o mercado de ações brasileiro, e, conseqüentemente, as transações com opções de ações. O foco deste trabalho é o mercado de opções de compra de ações da Bovespa nos anos de 2000 a 2003.

### *2.1 Amostra e Importância do Mercado*

A amostra disponível consiste na totalidade dos contratos de opções de compra de ações negociadas na Bovespa entre os dias 3 de janeiro de 2000 e 30 de junho de 2003, cotadas diariamente no fechamento. Visando caracterizar os resultados através do tempo, as observações foram agregadas semestralmente. A Tabela I é uma primeira ilustração do perfil geral da base de dados, mostrando o número de opções, o número de ações e empresas sobre as quais estas são escritas, e a média diária de contratos diferentes negociados por ações-objeto, definidas como os ativos que os titulares das opções de compra possuem o direito de adquirir ao preço de exercício do contrato. Verifica-se um ápice de empresas e ações-objeto entre o segundo semestre de 2002 e o primeiro semestre de 2001, com uma queda de transações no semestre seguinte. Embora o ano de 2003 represente uma retomada do número de opções com volume superior a zero, tal fato se refletiu na expansão do número médio de contratos disponíveis para cada ação-objeto ao invés do número de ações-objeto e empresas.

A representatividade do mercado de opções de compra de ações em termos de volumes financeiros é apresentada pela Tabela II. No período analisado, o mercado movimentou em média 4,2 bilhões de reais semestralmente, correspondendo a 5,45% do volume total da Bovespa. O volume anual negociado foi de cerca de 7,6 bilhões de reais em 2002, ou 5,6% do volume da Bovespa, com o montante de negócios beirando 2,7 milhões. Em 2003, foi registrado um crescimento significativo nas operações deste mercado: até junho, o número de negócios já estava em 3 milhões e o volume financeiro em reais já

ultrapassava 6,5 bilhões, representando 8% de todo o volume da Bovespa, participação superior às verificadas no restante dos semestres da amostra. Nos dois semestres de 2000, quando os volumes financeiros totais foram comparáveis ou superiores aos desse período, as participações foram proporcionalmente muito inferiores (3,7% e 4,5%). As Figuras I e II abaixo mostram ainda a existência de uma correlação positiva entre o volume financeiro mensal das opções de compra (linha mais clara) e as transações no mercado à vista e o desempenho do índice Bovespa.

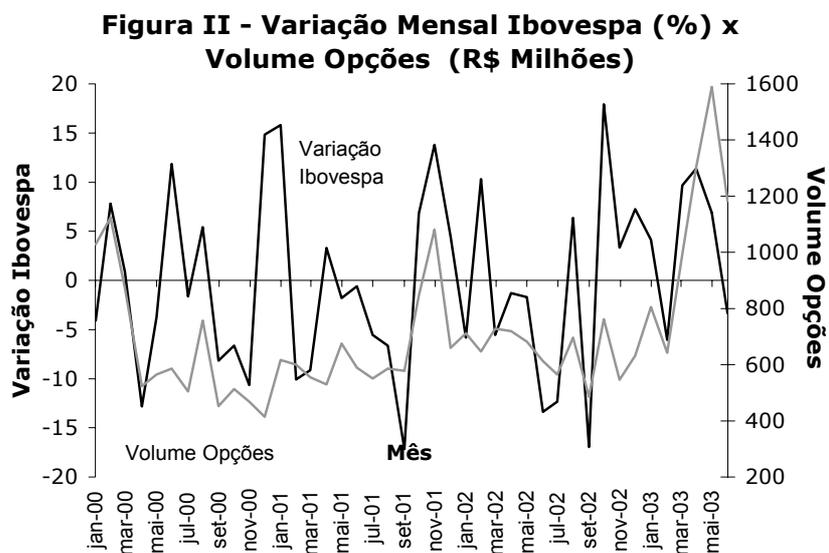
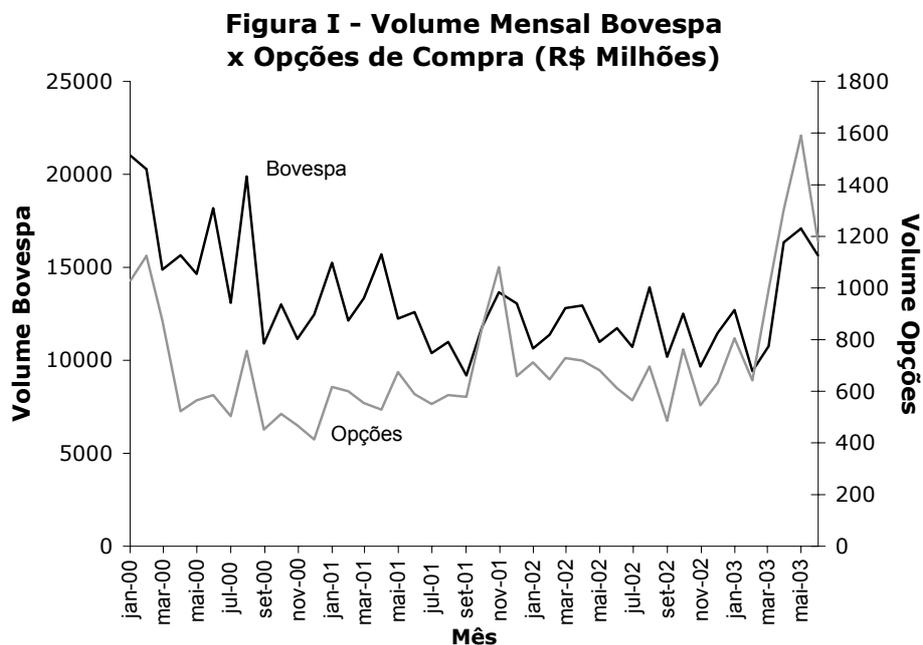
**Tabela I – Tamanho da Amostra**

Semestre	Número de Contratos	Número de Empresas	Número de Ações-Objeto	Média Diária de Contratos por Ação
2000.1	5907	39	51	4,05
2000.2	7146	47	53	3,53
2001.1	6625	44	52	3,35
2001.2	5848	40	47	3,96
2002.1	5418	33	36	4,23
2002.2	6359	31	36	4,66
2003.1	7171	33	37	4,73
<b>Média</b>	6353	38,14	44,57	4,07

**Tabela II – Volume Financeiro do Mercado de Opções x Bovespa**

Semestre	Volume Opções de Compra (R\$ Bilhões)	Participação na Bovespa (%)	Volume Bovespa (R\$ Bilhões)
2000.1	4,7	4,49	104,6
2000.2	3,1	3,86	80,5
2001.1	3,6	4,39	81,2
2001.2	4,3	6,23	69,1
2002.1	4,1	5,82	70,4
2002.2	3,7	5,38	68,4
2003.1	6,5	7,95	81,9
<b>Média</b>	4,3	5,45	7,95

Fonte: Informe Técnico Bovespa – Dezembro/2001 e Outubro/2003.



## 2.2 Tipos de Opções

As datas em que os direitos de compra do ativo-objeto adquiridos pelos titulares das opções podem ser exercidos são determinadas de acordo com o tipo do contrato. Uma opção do tipo européia só pode ser exercida na data de vencimento, enquanto uma opção

americana pode ser exercida a qualquer momento até a data de expiração. Opções com condições mais complexas de exercício são chamadas de exóticas, sendo negociadas basicamente em mercados de balcão. Uma opção asiática, por exemplo, baseia-se no preço médio do ativo-objeto durante a existência da opção, enquanto as opções tradicionais (americanas e européias) possuem um *payoff* dependente apenas da cotação do ativo no momento de exercício. A Tabela III mostra a distribuição das opções observadas de acordo com essa classificação, evidenciando uma predominância absoluta das opções americanas no mercado em estudo.

**Tabela III – Opções Americanas e Européias**

Semestre	Americanas		Européias	
	Contratos	Volume (Em R\$ Milhões)	Contratos	Volume (Em R\$ Milhões)
<b>2000.1</b>	5892	4586,98	15	23,94
<b>2000.2</b>	6981	2982,48	165	94,76
<b>2001.1</b>	6592	3533,98	33	11,81
<b>2001.2</b>	5749	4292,54	99	70,37
<b>2002.1</b>	5348	4004,85	70	11,66
<b>2002.2</b>	6271	3596,72	88	71,64
<b>2003.1</b>	7042	6488,02	129	71,33

### 2.3 Ações-Objeto

Esta subseção analisa como a distribuição da liquidez se dá através das ações sobre as quais as opções de compra são escritas, ativos cujos titulares das opções possuem direito de aquisição ao preço de exercício do contrato. O cálculo realizado agora consiste em multiplicar a quantidade de opções negociadas pelas respectivas cotações, somando os volumes por ação-objeto semestralmente. Infelizmente, não se dispõe de informações sobre as médias diárias dos preços das opções, de forma que os valores apresentados são extraídos a partir das cotações de fechamento. A Tabela IV a seguir apresenta as dez ações-objeto cujas opções somadas tiveram maior liquidez a cada semestre. A coluna dias corresponde ao número de dias em que as opções da ação foram negociadas naquele semestre (na amostra, o valor máximo desta coluna sempre corresponde à totalidade dos dias úteis possíveis).

**Tabela IV – Dez Maiores Volumes Financeiros Semestrais por Ações-Objeto e Setores (em R\$ Milhões)**

Estão tabulados a cada semestre as ações-objeto que representam os dez maiores montantes de contratos de opções em aberto. A coluna dias indica a quantidade de dias úteis em que as opções sobre dada ação objeto tiveram volume maior que zero.

Ação-Objeto	2000.1			Ação-Objeto	2000.2		
	Volume (R\$ Milhões)	Dias (Max. 124)	Part. (%)		Volume (R\$ Milhões)	Dias (Max. 124)	Part. (%)
Telebrás PN	2395,80	103	51,96	Globo Cabo PN	1134,82	124	36,88
Globo Cabo PN	1740,99	124	37,76	Telemar PN	1011,32	124	32,86
Telemar PN	247,76	41	5,37	Petrobrás PN	564,55	124	18,35
Petrobrás PN	54,59	63	1,18	Ibovespa	176,00	121	5,72
Ibovespa	34,48	53	0,75	Petrobrás ON	61,85	45	2,01
Acesita PN	20,47	124	0,44	Bradesco Part. PN	18,49	90	0,60
Celesc PNB	15,04	124	0,33	Pão-deAçucar PN	18,15	6	0,59
Copesul ON	11,45	36	0,25	Cesp PN	11,33	122	0,37
Telebrás R42	10,94	13	0,24	Vale do Rio Doce PNA	10,25	54	0,33
Petrobrás ON	10,75	6	0,23	Acesita PN	8,29	124	0,27
Outros	68,66	-	1,49	Outros	62,21	-	2,02

Ação-Objeto	2001.1			Ação-Objeto	2001.2		
	Volume (R\$ Milhões)	Dias (Max. 123)	Part. (%)		Volume (R\$ Milhões)	Dias (Max. 123)	Part. (%)
Telemar PN	2525,46	123	71,22	Telemar PN	3620,34	123	82,98
Ibovespa	481,23	123	13,57	Globo Cabo PN	268,68	123	6,16
Globo Cabo PN	301,31	119	8,50	Ibovespa	266,54	120	6,11
Petrobrás PN	145,01	123	4,09	Petrobrás PN	75,41	122	1,73
Comgás PN	9,00	4	0,25	Telesp Celular PN	50,12	105	1,15
Vale PNA	8,44	85	0,24	Eletrobrás ON	34,53	2	0,79
Telefonica BDR	7,11	26	0,20	Telefonica BDR	13,23	5	0,30
Petrobrás ON	6,66	1	0,19	Tele CO PN	13,04	12	0,30
Tran. Paulista PN	6,37	14	0,18	Telemar NL PNA	4,84	52	0,11
Telesp Celular PN	5,96	5	0,17	Petrobrás ON	4,02	8	0,09
Outros	55,20	-	1,56	Outros	12,16	-	0,28

Ação-Objeto	2002.1			Ação-Objeto	2002.2		
	Volume (R\$ Milhões)	Dias (Max. 122)	Part. (%)		Volume (R\$ Milhões)	Dias (Max. 127)	Part. (%)
Telemar PN	3485,69	122	86,78	Telemar PN	3253,71	127	88,70
Ibovespa	314,08	120	7,82	Ibovespa	216,38	122	5,90
Petrobrás PN	100,73	122	2,51	Itaú S.A. PN	44,03	2	1,20
Globo Cabo PN	53,95	122	1,34	Petrobrás PN	43,69	127	1,19
Telesp Celular PN	35,78	122	0,89	Telesp Celular PN	27,07	127	0,74
Telefonica BDR	5,50	4	0,14	Embraer PN	21,20	27	0,58
Vale PNA	3,80	19	0,09	Globo Cabo PN	19,61	126	0,53
Bradesco Part. PN	3,67	74	0,09	Embratel PN	14,37	127	0,39
Cemig PN	2,80	9	0,07	Telefonica BDR	7,38	3	0,20
Petrobrás ON	1,95	3	0,05	Tele Centro-Oeste	5,34	6	0,15
Outros	8,55	-	0,21	Outros	15,57	-	0,42

2003.1			
Ação-Objeto	Volume	Dias (Max. 122)	Part. (%)
Telemar PN	5998,83	122	91,45
Ibovespa	260,00	117	3,96
Itaú S.A. PN	114,21	122	1,74
Petrobrás PN	58,25	5	0,89
Telesp Celular PN	44,80	122	0,68
Embratel PN	26,57	122	0,41
Telefonica BDR	16,85	3	0,26
CSN PN	13,83	39	0,21
Petrobrás ON	7,74	9	0,12
Globo Cabo PN	6,21	122	0,09
Outros	12,06	-	0,18

Os quadros mostram que além de basear-se em uma pequena fração das ações listadas na Bovespa, o mercado de opções de compra está altamente concentrado em apenas três delas (inclusive as opções sobre o índice Ibovespa). De fato, a coluna que indica a participação em termos percentuais das ações-objeto sobre o volume total do mercado revela que no máximo três ações canalizam mais de 90% do montante negociado, padrão que se mostra estável ao longo tempo.

Entretanto, podem ocorrer mudanças em relação a essas três ações. No ano de 2000, por exemplo, ocorre uma transição no mercado de opções da Bovespa. Até então, havia um predomínio das opções sobre o Recibo de Carteira Seleccionada de Ações Telebrás (RCTB), instrumento criado após o leilão das 12 empresas do sistema Telebrás em julho de 1998 com o intuito a permitir aos investidores continuar negociando em bloco os papéis que conjuntamente compunham as ações da empresa. No primeiro semestre de 2000, a convergência dos negócios no mercado à vista em direção aos papéis das empresas derivadas da cisão implicou na perda da liquidez das opções sobre o RCTB (a partir de junho).

No segundo semestre daquele ano, duas ações-objeto passaram a concentrar 70% do mercado de opções. Por um lado, a grande especulação em torno dos papéis da Globo Cabo no mercado à vista refletia-se no volume das opções sobre a ação, enquanto o crescimento das transações com as opções da Telemar, maior companhia advinda da privatização da Telebrás, esteve relacionada com a importância que as ações da empresa ganharam no

mercado de ações, onde tornaram-se as mais negociadas. Em 2001, as opções da Globo Cabo perderam volume após as ações da empresa iniciarem uma trajetória de acentuada desvalorização<sup>3</sup>, deixando espaço para a consolidação das opções de compra da Telemar como centralizadoras de mais de 85% dos recursos investidos no mercado, enquanto as opções sobre o Ibovespa e as ações preferenciais da Petrobrás adquiriam importância secundária.

A Tabela V utiliza o índice de Gini para ilustrar o processo de concentração do volume financeiro entre as dez ações-objeto listadas semestralmente na tabela anterior.<sup>4</sup> Este indicador toma valores de zero a um, sendo que quanto mais próximo da unidade estiver, maior o nível de concentração. Nota-se que crescente intensificação da liquidez em torno das opções da Telemar leva a uma elevação quase monotônica do índice entre 2001 e 2003. Assim sendo, é possível concluir que o mercado de opções de compra da Bovespa ainda não apresentou potencial de diversificação das transações.

**Tabela V – Índice de Gini para a Concentração do Volume Financeiro entre os Dez Setores e Ações\_ Objeto com Maior Liquidez no Mercado de Opções**

Mostra os índices de Gini que medem a concentração do volume financeiro no grupo das dez ações-objetos com maior liquidez no mercado de opções.

	<b>Índice de Gini</b>
<b>2000.1</b>	0,7681
<b>2000.2</b>	0,6776
<b>2001.1</b>	0,7931
<b>2001.2</b>	0,8243
<b>2002.1</b>	0,8533
<b>2002.2</b>	0,8466
<b>2003.1</b>	0,8606

<sup>3</sup> A Globo Cabo iniciou o ano de 2000 valendo 20 reais, caindo para cerca de 10 reais no início de julho e inaugurando uma tendência de queda que se pronunciou ainda mais, resultando em uma cotação de apenas 30 centavos no final de 2002.

<sup>4</sup>O índice de Gini é dado por  $G = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\phi_{i-1} + \phi_i)$ , onde  $\phi_i$  corresponde ao percentual acumulado sobre o volume total até a classe i e n é o número de classes (no caso, n=10). Ver Hoffman (1998), cap. 16.

## *2.4 Prazos de Vencimento*

Outra dimensão importante da liquidez do mercado de opções é distribuição dos prazos de vencimento disponíveis. Até o terceiro trimestre de 2002, as datas de expiração dos contratos de opções de compra eram espaçadas bimestralmente, situando-se nos meses pares. Na segunda quinzena de setembro daquele ano, novas séries de opções com vencimento em novembro começaram a ser negociadas paralelamente às opções que venciam em outubro, e a partir de então as datas de exercício passaram a contemplar uma periodicidade mensal.

A Tabela VI mostra a quantidade de contratos na amostra em função do intervalo de tempo para a expiração na data de lançamento, em dias corridos. As opções foram divididas pelas seguintes ações, além daquelas sobre o índice Ibovespa: Telemar PN, Petrobrás PN, Itaú S.A. PN e Telesp Celular PN. Para a sua elaboração, foram excluídas as observações referentes ao primeiro semestre de 2000, uma vez que não havia informações sobre quando as opções iniciais da amostra foram lançadas. A Tabela VII permite a análise da liquidez por prazos de vencimentos no conjunto de todas as observações.

As duas tabelas mostram que o mercado é composto essencialmente por opções com até 60 dias para expiração e que começam a ser negociadas com maturidades entre 45 e 90 dias corridos. Comparando os dois quadros, observa-se que, embora um grande número de contratos seja lançado com vencimento entre 60 e 90 dias, os mesmos só ganham volume financeiro quando ficam a menos de dois meses do vencimento, até o segundo semestre de 2002, e a menos de um mês e meio, no primeiro semestre de 2003. Desta maneira, pode-se concluir que as opções só adquirem maior volume financeiro na proximidade ou após a expiração dos contratos na data de vencimento precedente. O incremento da participação das opções com até um mês para o vencimento a partir do segundo semestre de 2002, consequência do início do espaçamento mensal das datas de vencimento, respalda a evidência que o mercado de opções da Bovespa assume um caráter de curtíssimo prazo.

**Tabela VI – Número de Contratos na Data do Lançamento Classificados por Prazo de Expiração em Dias Corridos (2000.2-2003.1)**

<b>Prazo de vencimento</b>	<b>Telemar PN</b>	<b>Ibovespa</b>	<b>Petrobrás PN</b>	<b>Globo Cabo PN</b>	<b>Itaú SA PN</b>	<b>Telesp Cel PN</b>
Até 15	3		8	2		2
16-30	13	3	15	14		18
31-45	24	17	37	16		36
46-60	48	13	63	44	7	20
61-75	110	37	96	43	6	25
76-90	59	22	43	45	2	13
91-105	10	8	15	6		4
106-120	3	5	9	3		4
121-150	6	3	14	1		7
151-180		9	9			
Mais de 180	3	18	20	3		6

**Tabela VII – Volume Financeiro das Opções Observadas por Prazo de Vencimento (Em R\$ Milhões) – Toda Amostra**

	<b>2000.1</b>		<b>2000.2</b>		<b>2001.1</b>		<b>2001.2</b>	
	<b>Volume</b>	<b>%</b>	<b>Volume</b>	<b>%</b>	<b>Volume</b>	<b>%</b>	<b>Volume</b>	<b>%</b>
Até 15	846,49	18,36	569,18	18,50	601,41	16,96	781,85	17,92
16-30	1124,96	24,40	578,59	18,80	680,98	19,21	1089,49	24,97
31-45	1192,07	25,85	731,03	23,76	886,97	25,01	1094,69	25,09
46-60	881,72	19,12	696,68	22,64	872,26	24,60	923,07	21,16
61-75	396,69	8,60	280,07	9,10	366,56	10,34	374,03	8,57
76-90	42,93	0,93	47,64	1,55	33,46	0,94	15,46	0,35
91-105	14,59	0,32	11,85	0,38	7,05	0,20	9,01	0,21
106-120	13,97	0,30	22,91	0,74	12,40	0,35	7,05	0,16
121-150	6,03	0,13	41,39	1,34	29,47	0,83	4,47	0,10
151-180	10,65	0,23	32,86	1,07	24,80	0,70	1,91	0,04
Mais de 180	80,81	1,75	65,05	2,11	30,44	0,86	61,87	1,42

	<b>2002.1</b>		<b>2002.2</b>		<b>2003.1</b>		<b>Todos</b>	
	<b>Volume</b>	<b>%</b>	<b>Volume</b>	<b>%</b>	<b>Volume</b>	<b>%</b>	<b>Volume</b>	<b>%</b>
Até 15	747,91	18,62	832,71	22,70	2513,44	38,32	6892,98	23,10
16-30	810,13	20,17	1181,54	32,21	2561,67	39,05	8027,37	26,90
31-45	1110,99	27,66	777,66	21,20	1129,24	17,22	6922,64	23,20
46-60	1010,19	25,15	606,98	16,55	155,30	2,37	5146,21	17,25
61-75	263,19	6,55	163,36	4,45	95,68	1,46	1939,57	6,50
76-90	12,98	0,32	18,34	0,50	22,12	0,34	192,94	0,65
91-105	1,21	0,03	7,91	0,22	5,21	0,08	56,84	0,19
106-120	3,40	0,08	30,21	0,82	4,91	0,07	94,86	0,32
121-150	3,89	0,10	5,69	0,16	13,99	0,21	104,93	0,35
151-180	3,21	0,08	8,98	0,24	4,72	0,07	87,13	0,29
Mais de 180	49,41	1,23	34,96	0,95	53,07	0,81	375,61	1,26

## 2.5 Moneyness

A Bovespa divulga semanalmente as opções com lançamento autorizado através do BDI (Boletim Diário de Informações), buscando equilibrar os preços de exercício em relação às cotações no mercado à vista. Assim sendo, também é relevante examinar o volume financeiro das opções do mercado em termos da distância entre o preço de exercício e o valor contemporâneo da ação. Para tal, é necessário definir a variável *moneyness*<sup>5</sup>, que representa esse desvio e constitui uma dimensão fundamental das opções analisadas ao longo do trabalho, uma vez que está intimamente ligada aos *payoffs* obtidos pelos titulares e lançadores na data de exercício. Portanto:

$$Moneyness = \left[ \frac{S}{Xe^{-rt}} - 1 \right] \times 100, \quad (1)$$

onde  $S$  é a cotação da ação objeto no mercado à vista,  $X$  o preço de exercício,  $r$  a taxa de juros livre de risco, e  $t$  o tempo para o vencimento em dias úteis. As cotações à vista foram extraídas do banco de dados Economática, sem ajuste para proventos (dividendos, bonificações, etc), uma vez que os preços de exercício fornecidos pela Bovespa são protegidos. Isso significa, por exemplo, que quando uma cotação entra ex-dividendos em determinada data, isto é, quando o valor dos dividendos pagos é deduzido do preço reportado, automaticamente o preço de exercício da base de dados também sofre redução equivalente. A taxa livre de risco é calculada a através da interpolação por Cubic Spline da estrutura a termo da taxa DI pré-fixada (vide Varga, 2000), tendo como alvo o prazo de vencimento da opção.

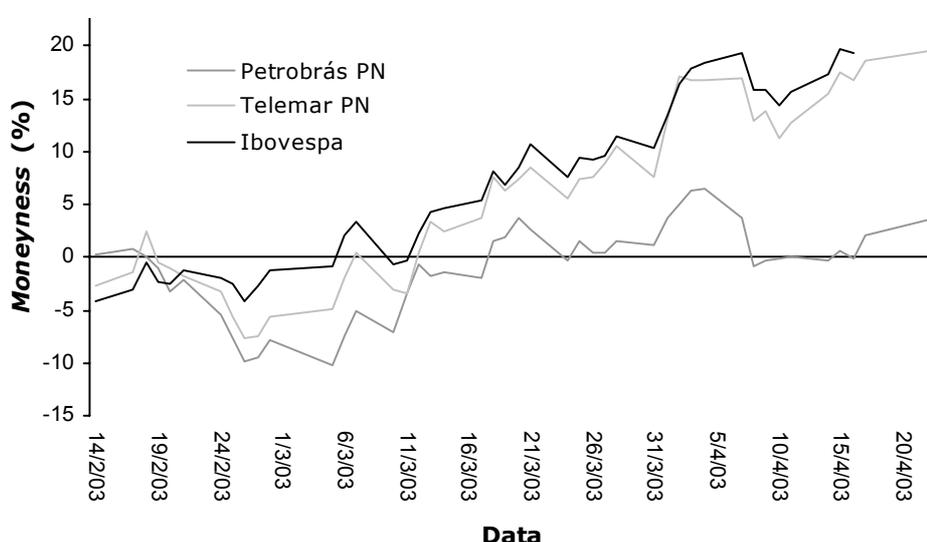
Portanto, o *moneyness* representa o desvio em termos percentuais do valor atual da ação (líquida dos dividendos pagos até o vencimento da opção) com relação ao valor presente do preço de exercício. Se a variável assume um valor positivo, diz-se que a opção encontra-se dentro-do-dinheiro (*in-the-money*), significando que o titular possui o direito de comprar a ação-objeto a um preço inferior ao vigente naquele momento no mercado (atentando para o fato de que a possibilidade da opção ser efetivamente exercida ou não em determinada data depende do tipo da opção). Se o *moneyness* é negativo, diz-se que a opção está fora-do-dinheiro (*out-of-the-money*). Uma opção no dinheiro (*at-the-money*) possui

---

<sup>5</sup> Termo comumente empregado na literatura estrangeira.

*moneyness* igual a zero, mas em termos práticos é tida como uma opção em uma faixa arbitrária em torno desse valor. A Figura III ilustra a trajetória do *moneyness* até o vencimento para três contratos de opções que se encontravam razoavelmente perto do dinheiro no lançamento em fevereiro de 2003, referentes as ações da Telemar (TNLP), Petrobrás (PETR) e do índice Ibovespa. Esta subseção se limita à análise destas três ações-objeto, as mais importantes do conjunto da amostra.

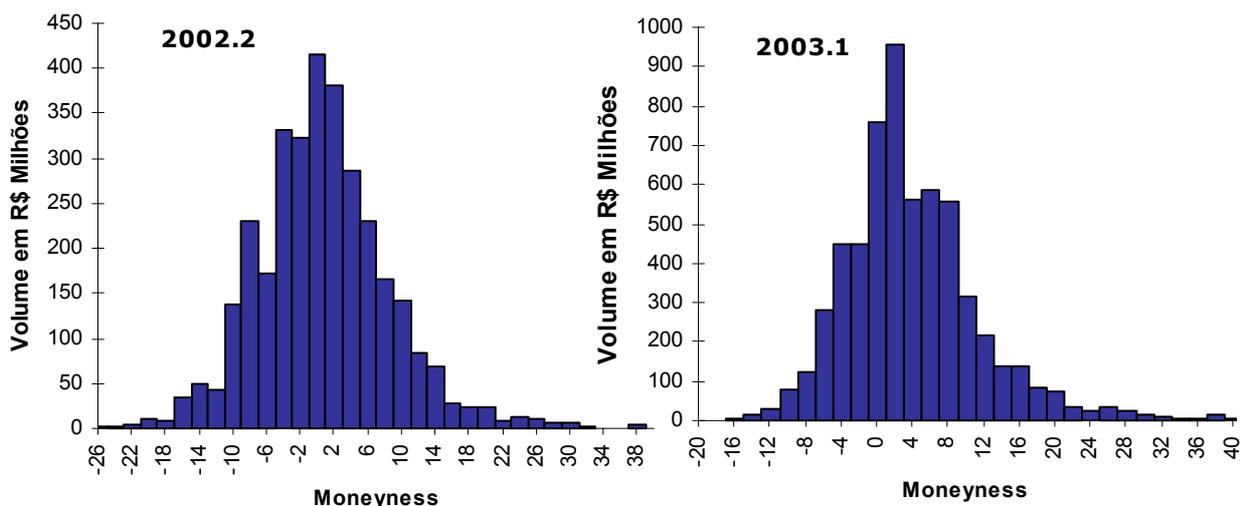
**Figura III – Tracking de Contratos de Opções Selecionados Perto do Dinheiro no Lançamento em 14/2/2003 até o Vencimento**



Os histogramas da Figura IV desenham um perfil detalhado do volume financeiro das opções da Telemar PN entre faixas de *moneyness* nos dois últimos semestres. As modas das distribuições do *moneyness* para as opções sobre essa ação ponderadas pelo volume financeiro situam-se invariavelmente em um intervalo muito próximo do dinheiro. A Tabela VIII mostra as estatísticas descritivas das distribuições ilustradas pela Figura IV, acrescentando também as distribuições para as opções sobre a ação Petrobrás PN e o índice Bovespa. Para as opções da Telemar, nota-se que a maior parte do volume está concentrado entre contratos com *moneyness* absoluto de até cerca de 10%, e que as opções mais distantes apresentam liquidez bastante reduzida. Observa-se também a existência de uma assimetria positiva favorável aos contratos dentro-do-dinheiro. Para as opções sobre o índice Bovespa, os resultados são semelhantes, com a diferença que as opções mais dentro-do-dinheiro (*moneyness* superior a 10%) possuem maior participação. Em 2002.2, por

exemplo, esse grupo de opções possui uma participação um pouco acima de 25%, contra cerca de 10% no caso da Telemar. No caso das opções da Petrobrás, este fator é ainda mais pronunciado, implicando em um coeficiente de assimetria superior a sete na distribuição.

**Figura IV – Volume Financeiro das Opções de Compra da Ação Telemar PN por Faixa de *Moneyness***



**Tabela VIII – Estatísticas Descritivas das Distribuições do *Moneyness* Ponderadas Pelo Volume Financeiro**

Mostra a média, o coeficiente de assimetria, a moda e os quantis selecionados das distribuições do *moneyness* (ponderados pelo volume financeiro das observações diárias) para as opções de compra das ações Telemar PN (Figura IV), Petrobrás PN e Ibovespa no segundo semestre de 2003 e o primeiro semestre de 2003. O primeiro quantil da Telemar, por exemplo, indica os contratos com *moneyness* menores a 16,4% corresponderam a 1% do volume financeiro.

	Telemar PN		Petrobrás PN		Ibovespa	
	2002.2	2003.1	2002.2	2003.1	2002.2	2003.1
<b>Média</b>	1,07	3,86	8,36	7,9	4,42	4,6
<b>Assimetria</b>	0,76	0,72	8,7	7,0	1,45	2,59
<b>1</b>	-16,4	-10,8	-17,16	-9,25	-20,34	-9,13
<b>5</b>	-10,5	-6,7	-9,89	-4,64	-13,64	-6,70
<b>10</b>	-8,66	-4,8	-6,10	-2,14	-9,5	-3,55
<b>25</b>	-3,67	-0,55	-1,02	0,25	-4,45	0,69
<b>50</b>	0,43	2,58	4,75	5,36	3,65	3,46
<b>75</b>	5,95	7,6	13,7	13,1	11,91	7,74
<b>90</b>	10,70	13,0	25,13	20,86	22,1	14,15
<b>95</b>	14,5	17,4	36,36	29,56	26,75	17,0
<b>99</b>	25,6	29,0	36,36	32,75	30,37	37,45

A Tabela IX mostra a divisão entre as opções classificadas entre fora, no ou dentro do dinheiro. Para efetuar essa distinção, foram adotadas margens simétricas de dois, quatro e seis pontos percentuais ao redor de zero para a classificação no dinheiro. Os resultados respaldam a tendência de assimetria em favor de opções dentro-do-dinheiro para as opções da Telemar. Em certos períodos, como 2003.1, esse fator se pronuncia bastante, com 54% do volume alocado em opções com *moneyness* superior a 2% contra 20% naquelas *moneyness* inferior a -2%. Novamente, pode-se notar a grande concentração em opções mais perto do dinheiro, com uma razoável estabilidade de uma concentração na casa de 60% do volume financeiro entre opções com *moneyness* absoluto de até 6%. Para as outras ações-objeto, entretanto, verifica-se que o volume das opções dentro-do-dinheiro sempre é significativamente maior do que as fora do dinheiro para todas as classificações consideradas, enquanto a divisão entre opções no e dentro do dinheiro favorece sistematicamente estas últimas no caso da Petrobrás, com exceção de 2000.2 e não apresenta padrão estável para o Ibovespa.

**Tabela IX – Volume Financeiro das Opções Observadas por Classificação Fora, Dentro e No Dinheiro (Em R\$ Milhões)**

Mostra o volume financeiro das opções sobre a Telemar PN, o índice Ibovespa e Petrobrás PN fora, no e dentro do dinheiro para três margens distintas de classificação no dinheiro.

		2%			4%			6%		
		Fora	No	Dentro	Fora	No	Dentro	Fora	No	Dentro
<b>Telemar</b>	<b>2000.2</b>	311,33	243,80	460,14	199,90	488,10	327,26	109,19	667,75	238,33
<b>PN</b>	<b>2001.1</b>	943,28	699,36	916,17	724,17	1241,30	593,34	436,59	1717,53	404,70
	<b>2001.2</b>	1170,08	886,56	1574,48	884,65	1513,29	1233,19	622,71	2072,58	935,84
	<b>2002.1</b>	1320,34	825,02	1365,35	880,33	1758,14	872,24	583,01	2328,68	599,02
	<b>2002.2</b>	1167,60	792,09	1301,78	796,26	1527,04	938,17	578,34	1969,54	713,60
	<b>2003.1</b>	1225,77	1565,05	3289,16	744,02	2749,39	2586,57	329,72	3808,66	1941,60
<b>Ibovespa</b>	<b>2000.2</b>	44,46	44,36	110,24	32,52	71,16	95,38	19,46	103,24	76,35
	<b>2001.1</b>	29,06	44,72	457,66	18,76	75,17	437,50	10,52	99,25	421,66
	<b>2001.2</b>	34,80	35,08	212,02	20,25	71,59	190,05	11,99	99,96	169,94
	<b>2002.1</b>	47,18	68,32	251,67	31,07	117,57	218,52	21,44	163,42	182,30
	<b>2002.2</b>	68,19	37,40	120,81	60,12	60,53	105,75	44,61	89,63	92,15
	<b>2003.1</b>	42,20	65,75	169,76	22,66	131,65	123,41	15,56	168,42	93,74
<b>Petrobrás</b>	<b>2000.2</b>	160,08	115,89	307,43	100,64	246,67	236,09	49,78	340,14	193,49
<b>PN</b>	<b>2001.1</b>	11,10	31,31	120,11	4,66	56,28	101,58	2,41	75,22	84,89
	<b>2001.2</b>	17,19	22,14	59,53	10,98	35,17	52,71	7,83	40,51	50,52
	<b>2002.1</b>	12,49	12,12	114,28	9,32	27,32	102,26	7,25	36,87	94,78
	<b>2002.2</b>	10,35	9,31	34,03	7,89	14,61	31,19	5,57	19,30	28,83
	<b>2003.1</b>	12,61	32,28	99,98	7,38	45,13	92,36	3,76	67,50	73,61

**Tabela X – Participação Percentual das Opções Observadas por Classificação Fora, Dentro e No Dinheiro sobre o Volume Financeiro Total dos Contratos Sobre a Ação-Objeto**

Mostra a representatividade dos volumes financeiros da Tabela IX em termos da participação percentual sobre a soma do volume de todas as opções sobre a ação no semestre.

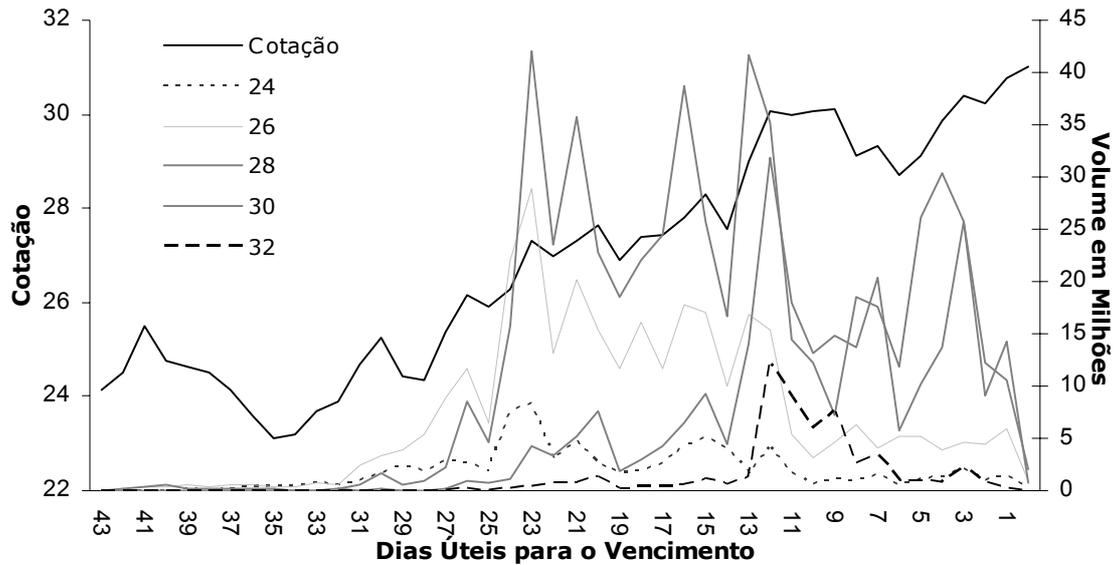
		2%			4%			6%		
		Fora	No	Dentro	Fora	No	Dentro	Fora	No	Dentro
<b>Telemar</b>	<b>2000.2</b>	30,66	24,01	45,32	19,69	48,08	32,23	10,75	65,77	23,47
<b>PN</b>	<b>2001.1</b>	36,86	27,33	35,80	28,30	48,51	23,19	17,06	67,12	15,82
	<b>2001.2</b>	32,22	24,42	43,36	24,36	41,68	33,96	17,15	57,08	25,77
	<b>2002.1</b>	37,61	23,50	38,89	25,08	50,08	24,85	16,61	66,33	17,06
	<b>2002.2</b>	35,80	24,29	39,91	24,41	46,82	28,77	17,73	60,39	21,88
	<b>2003.1</b>	20,16	25,74	54,10	12,24	45,22	42,54	5,42	62,64	31,93
<b>Ibovespa</b>	<b>2000.2</b>	22,34	22,28	55,38	16,34	35,75	47,92	9,78	51,86	38,36
	<b>2001.1</b>	5,47	8,41	86,12	3,53	14,14	82,32	1,98	18,68	79,34
	<b>2001.2</b>	12,34	12,44	75,21	7,18	25,40	67,42	4,25	35,46	60,29
	<b>2002.1</b>	12,85	18,61	68,54	8,46	32,02	59,51	5,84	44,51	49,65
	<b>2002.2</b>	30,12	16,52	53,36	26,56	26,73	46,71	19,70	39,59	40,70
	<b>2003.1</b>	15,20	23,68	61,13	8,16	47,40	44,44	5,60	60,64	33,75
<b>Petrobrás</b>	<b>2000.2</b>	27,44	19,86	52,70	17,25	42,28	40,47	8,53	58,30	33,16
<b>PN</b>	<b>2001.1</b>	6,83	19,26	73,90	2,86	34,63	62,51	1,48	46,28	52,24
	<b>2001.2</b>	17,39	22,39	60,22	11,10	35,58	53,32	7,92	40,97	51,11
	<b>2002.1</b>	8,99	8,73	82,28	6,71	19,67	73,62	5,22	26,54	68,24
	<b>2002.2</b>	19,27	17,34	63,39	14,70	27,21	58,09	10,37	35,94	53,69
	<b>2003.1</b>	8,70	22,28	69,02	5,10	31,15	63,75	2,59	46,60	50,81

## 2.6 Comparando Diferentes Contratos

Até aqui, a análise da liquidez do mercado de opções concentrou-se na avaliação das distribuições dos volumes financeiros agregados semestralmente. A Figura V ajuda a sintetizar ilustrativamente os resultados descritos até aqui. O gráfico foi elaborado a partir da tabulação dos volumes financeiros diários dos cinco contratos mais líquidos dentre todas as opções do mercado com expiração em 22/4/2003. Não surpreendentemente, todos são opções sobre a ação Telemar PN. O histórico da cotação da ação no período, adicionada ao gráfico, mostra que os preços de exercício 26, 28 e 30, séries de maior volume total, foram os que se encontraram em média mais perto do dinheiro até o vencimento entre as opções da Telemar. Observa-se também a superioridade do volume da série 24 em relação a 32, até esta última entrar em uma faixa de *moneyness* perto do dinheiro a 14 dias do vencimento, consistentemente com a constatação de assimetria entre opções mais dentro-do-dinheiro e mais fora-do-dinheiro com *moneyness* absolutos semelhantes. Por meio da inspeção visual,

pode-se notar ainda que, conforme destacado anteriormente, as opções sobre a ação tendem a ganhar liquidez a cerca de um mês e meio para vencimento.

**Figura V – Tracking do Volume Financeiro das Opções de Compra da Ação Telemar PN com Vencimento em 22/4/2003 e Preços de Exercício 24, 26, 28, 30, 32**



Apesar da análise anterior proporcionar uma descrição detalhada sobre a distribuição do volume financeiro entre os contratos de opções, ainda resta caracterizar a liquidez diária do mercado entre as séries disponíveis para as ações-objeto. Entende-se por série cada combinação de preços de exercício e vencimentos negociados por ação-objeto. A Tabela XI mostra a concentração média diária do mercado de opções em termos de todos os contratos disponíveis. Ela foi construída da seguinte maneira: a cada dia da amostra foram calculadas, para as observações naquela data, as participações percentuais no volume financeiro diário. Em seguida, todas esses contratos foram classificados de acordo com esse percentual. Os valores apresentados na tabela representam as médias semestrais da participação da mais líquida diariamente, da segunda mais líquida e assim por diante.

**Tabela XI – Média de Participação sobre o Volume Total dos Quinze Contratos Mais Líquidos Diariamente no Mercado de Opções de Compra, por Semestre**

Mostra a média de participação do primeiro ao décimo quinto contrato mais líquido sobre o volume financeiro total diário, englobando todas as combinações de ações-objeto, vencimentos e preços de exercício.

	2000.1	2000.2	2001.1	2001.2	2002.1	2002.2	2003.1
<b>Mais Líquido</b>	29,81	24,70	30,49	34,72	37,88	43,99	39,56
2º	17,73	15,68	21,00	22,74	26,08	23,77	22,63
3º	12,16	11,02	12,49	12,00	12,92	11,39	11,82
4º	8,83	8,52	7,68	7,38	7,09	5,85	6,67
5º	6,88	6,64	5,46	4,90	4,22	3,61	4,55
6º	4,91	5,35	4,11	3,54	2,68	2,43	3,12
7º	3,67	4,45	3,24	2,77	1,97	1,82	2,27
8º	2,97	3,71	2,58	2,12	1,40	1,41	1,77
9º	2,36	3,13	2,14	1,71	1,10	1,07	1,31
10º	1,96	2,61	1,74	1,39	0,83	0,83	1,05
11º	1,59	2,21	1,41	1,15	0,67	0,64	0,84
12º	1,30	1,85	1,20	0,95	0,52	0,52	0,66
13º	1,02	1,51	1,00	0,76	0,42	0,41	0,53
14º	0,84	1,25	0,84	0,63	0,35	0,33	0,44
15º	0,68	1,07	0,71	0,52	0,29	0,28	0,37
<b>Outros</b>	3,28	6,30	3,91	2,72	1,56	1,66	2,42

A Tabela mostra que, em média, 75% a 88% da liquidez diária do mercado de opções de compra é concentrada em cinco contratos de opções. Nos três últimos períodos, dez primeiras constituem cerca de 95% do mercado, e as 15 primeiras, cerca de 98%. Visando caracterizar estes contratos na parte mais recente da amostra, a Tabela XII mostra, por ações objeto no primeiro semestre de 2003, o número médio de opções de determinadas ações entre as  $n$  mais líquidas diariamente, com  $n$  indo da mais líquida até a décima mais líquida. Já a Tabela XIII mostra, para o mesmo período, a distribuição das classificações da Tabela XI entre as essas ações.

**Tabela XII – Média do Número de Contratos da Ação Entre as Enésimas mais Líquidas Diariamente**

	Telemar PN	Petrobrás PN	Ibovespa	Itaú S.A	Telesp Cel PN	Outros
<b>1</b>	0,98	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00
<b>2</b>	1,95	0,01	0,00	0,02	0,00	0,01
<b>3</b>	2,89	0,02	0,05	0,02	0,00	0,01
<b>4</b>	3,71	0,06	0,17	0,02	0,00	0,01
<b>5</b>	4,51	0,09	0,30	0,04	0,00	0,02
<b>6</b>	5,17	0,12	0,54	0,06	0,00	0,06
<b>7</b>	5,87	0,15	0,79	0,07	0,00	0,07
<b>8</b>	6,56	0,20	1,00	0,08	0,01	0,09
<b>9</b>	7,28	0,24	1,19	0,08	0,03	0,10
<b>10</b>	7,93	0,31	1,37	0,08	0,08	0,15

**Tabela XIII – Distribuição dos Dez Contratos Mais Líquidos Diariamente no Mercado de Opções de Compra por Ações-Objeto (2003.1/ Max = 122)**

	Telemar PN	Petrobrás PN	Ibovespa	Itaú S.A	Telesp Cel PN	Outros
<b>Mais Líquido</b>	120			2		
<b>2º</b>	120	1				1
<b>3º</b>	115	1	6			
<b>4º</b>	101	5	15	1		
<b>5º</b>	99	4	16	2		1
<b>6º</b>	81	4	30	2		5
<b>7º</b>	86	4	30	1		1
<b>8º</b>	85	5	26	2	1	3
<b>9º</b>	89	6	23		3	1
<b>10º</b>	79	8	23		6	6

Novamente, os resultados mostram a predominância das opções da Telemar. Entre os dez contratos com maiores volumes financeiros a cada dia, em média oito opções são escritas sobre a ação-objeto, que teve as três opções mais líquidas em 91% dos pregões, as cinco mais em 62%, as oito mais em 20% e as dez mais em 10%. Percebe-se ainda que as opções sobre as ações do Itaú, que raramente são negociadas (vide Tabela IV), aparecem como espécies de *outliers* em algumas datas.

A Tabela XIV realiza uma desagregação das opções dos quadros anteriores. Para tal, os contratos foram primeiramente classificados por ação-objeto, faixas de *moneyness* e entre prazos de vencimento de menos de trinta dias e mais de trinta dias para o vencimento, sendo ranqueados em seguida de acordo com o volume financeiro total no primeiro semestre de 2003. Nota-se que as três séries de maior liquidez diária correspondem a combinações das 4 primeiras especificações do ranking, o que pode ser verificado a partir da coluna do número de observações. Tipicamente, pode-se afirmar que esses três contratos são opções da Telemar com menos de 30 trinta dias para o vencimento, em que a mais líquida é aquela com *moneyness* positivo mais perto do dinheiro, e as outras duas, a de *moneyness* negativo mais perto do dinheiro e a aquela segundo menor *moneyness* positivo. Na sequência, as opções mais líquidas situam-se entre os contratos da Telemar com mais de trinta dias para o vencimento perto do dinheiro, opções do índice Bovespa com mais de trinta dias para vencimento no ou dentro do dinheiro (ver participação média), opções da Telemar com menos de trinta dias muito dentro-do-dinheiro, seguidas das opções da Telemar com menos trinta dia mais fora do dinheiro e as de mais de trinta dias muito

dentro-do-dinheiro. Em algumas datas, as opções da Petrobrás com mais de trinta dias para o vencimento e dentro-do-dinheiro adquirem volume mais elevado, constando entre aquelas de liquidez intermediária. Cabe observar, porém, que essa média não reflete o comportamento diário do mercado. Assim como no caso do Itaú, em raras datas algumas séries de opções com mais de 60 dias da Petrobrás apresentam volumes muito elevados em relação ao dia típico. Assim sendo, as opções da empresa com maior quantidade de negócios também são as de menos de trinta dias para o vencimento.

**Tabela XIV – Ranking dos Dez Tipos de Contratos Mais Líquidos no Primeiro Semestre de 2003**

<b>Ranking Volume Total</b>	<b>Ação- Objeto</b>	<b>Moneyness</b>	<b>Prazo</b>	<b>Volume (R\$ Milhões)</b>	<b>Part. No Volume Total</b>	<b>Obs.</b>	<b>Part. Média Diária</b>
1	Telemar PN	(0,5)	30≤	1581	26,54	90	33,16
2	Telemar PN	(5,10)	30≤	1141	19,16	89	21,97
3	Telemar PN	(-5,0)	30≤	979	16,44	96	21,38
4	Telemar PN	(10,15)	30≤	403	6,76	67	11,40
5	Telemar PN	(-5,0)	>30	350	5,87	123	4,98
6	Telemar PN	(15,25)	30≤	279	4,69	126	3,76
7	Telemar PN	(0,5)	>30	262	4,40	116	4,37
8	Telemar PN	(5,10)	>30	178	2,98	101	2,96
9	Telemar PN	>25	30≤	100	1,69	196	0,79
10	Telemar PN	(10,15)	>30	92	1,54	77	2,10
11	Telemar PN	(15,25)	>30	74	1,23	120	0,97
12	Ibovespa	(0,5)	>30	67	1,12	54	2,31
13	Telemar PN	(-15,-10)	30≤	57	0,96	108	1,12
14	Ibovespa	(0,5)	30≤	32	0,53	28	2,08
15	Ibovespa	(5,10)	>30	31	0,52	33	2,35
16	Itaú SA PN	>25	>30	29	0,48	3	15,88
17	Ibovespa	(-5,0)	>30	27	0,45	56	1,18
18	Telemar PN	(-15,-10)	>30	26	0,44	153	0,39
19	Telemar PN	>25	>30	24	0,41	65	0,47
20	Petrobrás PN	(0,5)	>30	19	0,32	131	0,30
21	Ibovespa	(5,10)	30≤	19	0,31	24	1,46
22	Ibovespa	(10,15)	>30	16	0,27	19	1,59
23	Petrobrás PN	(15,25)	>30	15	0,26	31	1,34
24	Petrobrás PN	(10,15)	>30	12	0,21	68	0,30
25	Ibovespa	(15,25)	30≤	12	0,20	12	1,67

### 3. Análise das Volatilidades Implícitas

Existem duas formas de se avaliar o modelo de Black and Scholes. Uma delas é examinar diretamente os erros de apreçamento em relação aos valores de mercado, objetivo do capítulo seguinte. A outra é através da análise das estruturas de volatilidades implícitas, inferidas a partir da igualdade entre os preços de mercado reportados e a fórmula de apreçamento (a volatilidade dos retornos da ação seria, portanto, a única variável desconhecida na equação). Esta seção discute as principais hipóteses do modelo de Black and Scholes, enfatizando as fontes dos erros no apreçamento de opções e mostrando como as volatilidades implícitas podem ser utilizadas para avaliá-los na amostra descrita no capítulo anterior.

No modelo de Black and Scholes, o movimento do preço das ações-objeto dos contratos de opções é descrito por um movimento browniano geométrico:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \quad (2)$$

onde  $S$  é o preço do ativo,  $\mu$  é a taxa de crescimento esperada do preço da ação por unidade de tempo,  $\sigma$  é a volatilidade do retorno das ações por unidade de tempo,  $t$  é o tempo, e  $z$  um processo de Wiener,<sup>6</sup> que pode ser interpretado como a parcela de choques não esperados.

Pode-se mostrar, pelo Lema de Ito (vide Hull, 2000, cap. 10), que dado o movimento browniano geométrico, o logaritmo natural do preço da ação em  $T$  possui a seguinte distribuição normal:

$$\ln S_t \sim N \left[ \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \quad (3)$$

O modelo implica, portanto, que o preço do ativo em  $T$ , dado o preço na data zero ( $S_0$ ), tem distribuição lognormal, o que por sua vez, implica que a distribuição do retorno continuamente composto da ação entre 0 e  $T$  ( $\alpha = \ln(S_t / S_0)$ ) é normalmente distribuído com volatilidade constante.

$$\alpha \sim N \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \right) \quad (4)$$

---

<sup>6</sup> Um processo de Wiener possui as seguintes propriedades: (1) A variação  $dz$  durante um intervalo de tempo  $dt$  é dado por:  $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$  (2) Os valores de  $dz$  entre dois intervalos infinitesimais  $dt$  são independentes.

Cabe então examinar se essas premissas são consistentes com os dados disponíveis, iniciando pela hipótese de normalidade da variável  $\alpha$  definida em (6). A tabela VIII mostra algumas estatísticas descritivas sobre os retornos diários das ações-objeto mais negociadas no período 2001.1-2003.1: Telemar PN, Petrobrás PN e o índice Ibovespa.

**Tabela XV – Estatísticas Descritivas dos Retornos, por Semestre**

Mostra as estatísticas descritivas para os retornos diários continuamente compostos das ações da Telemar PN (TNLP), Petrobrás PN (PETR) do Ibovespa (IBOV). As médias, medianas e volatilidades estão medidas em termos anualizados.

<b>Ação</b>	<b>Semestre</b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Volatilidade</b>	<b>Assimetria</b>	<b>Curtose</b>
<b>Telemar PN</b>	<b>2001.1</b>	-27,57	-40,88	42,80	0,18	3,67
	<b>2001.2</b>	7,40	-40,07	49,14	0,54	5,29
	<b>2002.1</b>	-37,69	-51,40	40,35	-0,12	2,81
	<b>2002.2</b>	-6,89	-32,37	47,39	-0,15	3,75
	<b>2003.1</b>	65,09	44,45	36,16	0,06	2,56
<b>Ibovespa</b>	<b>2001.1</b>	-9,17	-8,11	31,50	0,07	4,19
	<b>2001.2</b>	-13,33	-17,92	36,56	-0,45	5,21
	<b>2002.1</b>	-33,56	-34,74	29,39	-0,31	2,84
	<b>2002.2</b>	2,31	-7,45	36,07	-0,08	3,29
	<b>2003.1</b>	33,76	83,91	26,81	-0,26	2,64
<b>Petrobrás PN</b>	<b>2001.1</b>	54,47	31,99	34,37	-0,33	3,66
	<b>2001.2</b>	-6,80	-34,84	37,16	-0,02	4,10
	<b>2002.1</b>	-0,55	-21,02	30,61	-0,35	5,74
	<b>2002.2</b>	-6,36	-5,50	43,51	-0,11	4,34
	<b>2003.1</b>	30,09	77,77	32,13	-0,13	3,21

Para testar a hipótese nula de normalidade, três testes são implementados. A estatística de Jarque-Bera baseia-se nos coeficientes de assimetria e curtose da distribuição amostral. Estatísticas de teste superiores a seis levam à rejeição da hipótese nula. Também é utilizado o teste não-paramétrico de Lilliefors, que usa a distribuição empírica para testar a hipótese sem especificação de média e variância. O teste de Lilliefors é semelhante ao de Kolmogorov-Smirnov, adaptando-se ao fato que os parâmetros da distribuição são estimados ao invés de especificados<sup>7</sup>. Finalmente, também é computado o teste de Shapiro-Wilk, bastante usual na literatura.

<sup>7</sup> Ver Conover (1971).

Os resultados mostram que alguns casos, a hipótese de normalidade dos retornos não pode ser aceita. Para as ações da Telemar, os testes de Jarque-Bera e Shapiro-Wilk são sempre coerentes, rejeitando a hipótese nula ao nível de 5% no segundo semestre de 2001 e 2002. Pela Tabela VII, é possível verificar que tais períodos são os de maior volatilidade na amostra, apresentando também um excesso de curtose. No primeiro caso, a distribuição ainda é fortemente mais assimétrica que nos outros períodos. Pelo teste de Lilliefors, a hipótese nula só é rejeitada em 2002.2.

**Tabela XVI – Testes de Normalidade dos Retornos (2001.1-2003.1)**

Mostra os testes de normalidade dos retornos diários através dos testes de Lilliefors e Shapiro-Wilk (SW), além da estatística de Jarque-Bera (JB) para as ações Telemar PN (TNLP), Petrobrás PN (PETR) e do índice Ibovespa (IBOV). O p-valores do teste de Lilliefors apresentam valores em por faixas quando as estatísticas de teste se situam fora da tabela de Lilliefors.

<b>Ação</b>	<b>Semestre</b>	<b>Lilliefors</b>	<b>Crit</b>	<b>p-valor</b>	<b>JB</b>	<b>p-valor</b>	<b>SW</b>	<b>p-valor</b>
<b>Telemar PN</b>	<b>2001.1</b>	0,0507	0,0799	>0,100	3,1862	0,203	0,99142	0,64961
	<b>2001.2</b>	0,0627	0,0799	>0,100	33,869	0,000	0,96727	0,00439
	<b>2002.1</b>	0,0532	0,0802	>0,100	0,4344	0,805	0,99156	0,66799
	<b>2002.2</b>	0,0817	0,0786	0,0436	3,6987	0,157	0,97714	0,03011
	<b>2003.1</b>	0,0432	0,0802	>0,100	0,9837	0,611	0,99001	0,52312
<b>Ibovespa</b>	<b>2001.1</b>	0,0634	0,0799	>0,100	7,8121	0,020	0,97994	0,06397
	<b>2001.2</b>	0,0542	0,0799	>0,100	30,312	0,000	0,96525	0,00294
	<b>2002.1</b>	0,0691	0,0802	>0,100	2,0275	0,363	0,97864	0,04974
	<b>2002.2</b>	0,0594	0,0786	0,1572	0,6847	0,710	0,99377	0,85147
	<b>2003.1</b>	0,0623	0,0802	>0,100	1,9553	0,376	0,98342	0,14029
<b>Petrobrás PN</b>	<b>2001.1</b>	0,0509	0,0799	>0,100	4,6622	0,097	0,98795	0,35225
	<b>2001.2</b>	0,0505	0,0799	>0,100	6,5862	0,037	0,98693	0,28724
	<b>2002.1</b>	0,0743	0,0802	0,0906	42,109	0,000	0,95977	0,00108
	<b>2002.2</b>	0,0543	0,0786	>0,100	10,187	0,006	0,98303	0,11322
	<b>2003.1</b>	0,0428	0,0802	>0,100	0,6265	0,731	0,99165	0,6765

Para o índice Ibovespa, o teste de Lilliefors não rejeita hipótese de normalidade dos retornos ao nível de 5% em nenhum dos períodos. A estatística de JB e o teste de Shapiro-Wilk, conjuntamente, não rejeitam a hipótese nula nos dois últimos períodos. Os dois testes rejeitam a hipótese de normalidade em 2001.2, por causa do excesso de curtose e do maior nível de assimetria, mas divergem nos primeiros semestres de 2001 e 2002. No primeiro caso, o excesso de curtose leva a estatística de JB a rejeitar a hipótese nula, enquanto o teste

de Shapiro-Wilk não o faz ao nível de 5%. No segundo, o teste de Shapiro-Wilk rejeita a hipótese ao nível de 5%, mas não a 1%, enquanto JB não rejeita a hipótese de normalidade. Para a Petrobrás, os índices divergem em 2001.2 e 2002.2, novamente pelo fato do índice de JB atribuir maior peso ao excesso de curtose. A hipótese nula é aceita ao nível de 5% pelos dois testes em 2001.1 e 2003.1 e pelo teste de Lilliefors em todos os períodos.

Portanto, pode-se concluir que embora a hipótese de normalidade seja adequada aos retornos observados das principais ações-objeto na maior parte do tempo, a mesma não pode ser aceita em períodos específicos. Como a tabela XVII abaixo mostra, a rejeição da hipótese nula nestes casos esteve associada principalmente ao excesso de curtose, uma vez que o coeficiente de assimetria só é significativamente diferente de zero ao nível de 5% nos casos da Ibovespa e Telemar em 2001.1, período em que a curtose três (normal) também foi fortemente rejeitada. Em todos os períodos em que a hipótese de normalidade não foi aceita por algum teste, com exceção da Telemar em 2001.1, os retornos médios das ações foram negativos. Ainda assim, apesar da média ter sido positiva (7,4%) nessa exceção, a mediana foi bastante negativa (-40,07%). Pela Tabela XV, verifica-se também que tais períodos costumam apresentar volatilidade mais elevada.

**Tabela XVII – Testes de Assimetria e Curtose dos Retornos (2001.1-2003.1)**

Utiliza o teste de D'Agostino, Balanger e D'Agostino Jr. (1990) para a hipótese nula de que os coeficientes de assimetria ( $\hat{\alpha}_3$ ) e curtose ( $\hat{\alpha}_4$ ) da Tabela XV são iguais ao de uma normal. A terceira coluna apresenta o p-valor da hipótese conjunta.

<b>Ação</b>	<b>Semestre</b>	<b>p(<math>\hat{\alpha}_3</math>)</b>	<b>p(<math>\hat{\alpha}_4</math>)</b>	<b>p(conj)</b>
<b>Telemar PN</b>	<b>2001.1</b>	0,390	0,107	0,182
	<b>2001.2</b>	0,015	0,001	0,001
	<b>2002.1</b>	0,567	0,895	0,842
	<b>2002.2</b>	0,471	0,081	0,162
	<b>2003.1</b>	0,760	0,344	0,604
<b>Ibovespa</b>	<b>2001.1</b>	0,749	0,022	0,0719
	<b>2001.2</b>	0,037	0,001	0,0021
	<b>2002.1</b>	0,151	0,947	0,3489
	<b>2002.2</b>	0,686	0,327	0,5643
	<b>2003.1</b>	0,224	0,505	0,3752

Ação	Semestre	$p(\hat{\alpha}_3)$	$p(\hat{\alpha}_4)$	$p(\text{conj})$
Petrobrás	2001.1	0,126	0,109	0,0857
PN	2001.2	0,912	0,029	0,0905
	2002.1	0,105	0,000	0,0016
	2002.2	0,607	0,014	0,048
	2003.1	0,533	0,42	0,5896

Passemos agora à hipótese de volatilidade constante. Aqui, novamente será feito recurso às opções da Telemar PN e da Petrobrás PN para descrever as implicações das estruturas de volatilidade para o apreçamento através do modelo de Black and Scholes. Definem-se as volatilidades implícitas como as volatilidades obtidas ao resolver a fórmula de Black and Scholes (5) para o parâmetro  $\sigma$ , dados os preços de mercado das opções.

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), \quad (5)$$

onde  $S$  a cotação da ação-objeto no mercado à vista líquida do valor presente dos dividendos pagos durante a existência da opção,  $X$  é o preço de exercício,  $T$  é o prazo de vencimento,  $r$  a taxa livre de risco,

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + 0,5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (6)$$

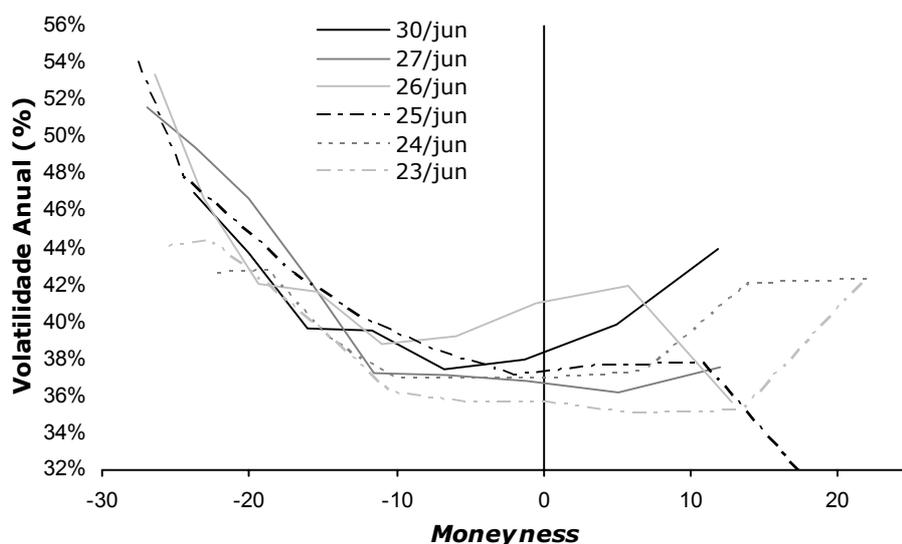
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \quad (7)$$

$\sigma$  é a volatilidade, e  $N(d_i)$  é a distribuição normal acumulada do limite superior  $d$  para a integral.

A distribuição dos retornos das ações (4), derivada através do modelo de movimentos brownianos geométricos (2), implica que a volatilidade é constante, e que, portanto, todas as opções sobre o mesmo ativo observadas no mesmo instante de tempo devem apresentar as mesmas volatilidades implícitas. Entretanto, as opções observadas nos mercados não respaldam essa previsão teórica. Os gráficos a seguir ilustram o comportamento dessas variáveis para opções da Telemar PN e da Petrobrás (pouco líquidas) no período de seis dias úteis entre 23/6/2003 e 30/6/2003. Não foram utilizadas opções sobre o Ibovespa pelo fato destas fornecerem poucos vértices diariamente (geralmente, duas ou três). A Figura VI ilustra alguns padrões típicos para as volatilidades implícitas das opções da Telemar com menos de trinta dias para o vencimento. Começando

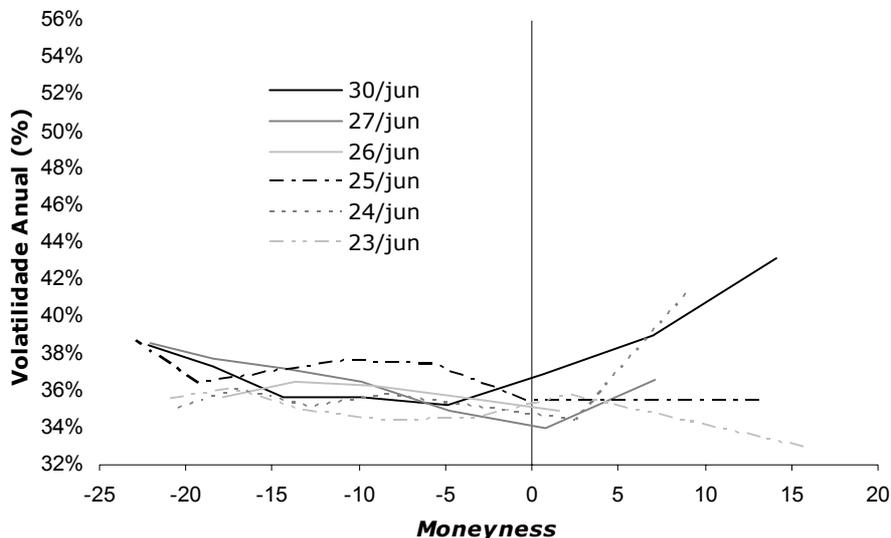
pelas opções mais fora-do-dinheiro, verifica-se um claro decaimento da volatilidade implícita à medida que os contratos ficam mais no dinheiro. A partir de um determinado ponto a zero, a curva torna-se menos inclinada. No intervalo em que as opções possuem *moneyness* absoluto de menos de 10%, o nível da volatilidade apresenta razoável estabilidade. Quando os preços de exercício se tornam muito dentro-do-dinheiro, entretanto, não ocorre nenhum padrão claro. Em algumas datas ocorrem os chamados *smiles*, quando a volatilidade implícita torna a subir fortemente, enquanto em outras ocorrem *smirks*, quando as volatilidades tendem a cair mais.

**Figura VI – Estruturas de Volatilidades Implícitas para Opções da Telemar com Menos de Trinta dias para o Vencimento (23 a 30 de Junho de 2003, Contratos com Expiração em 21/7)**

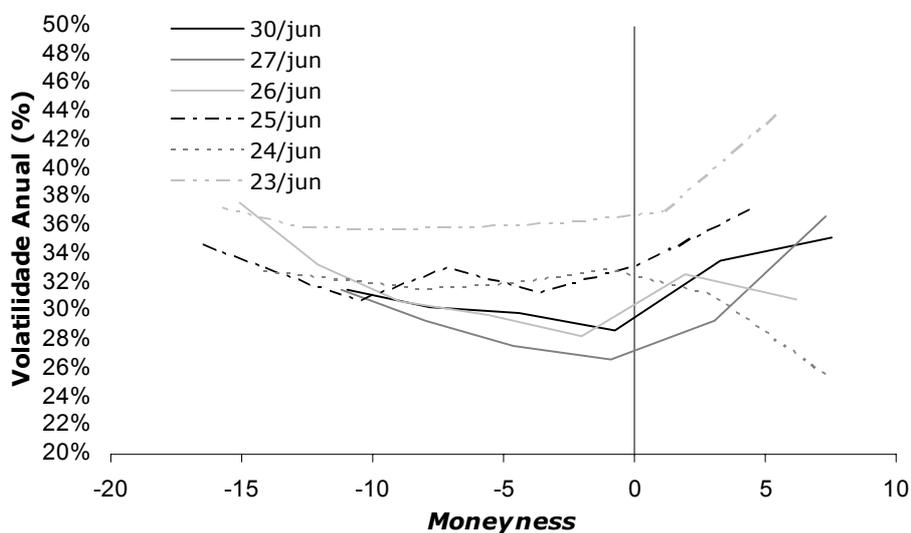


Pela Figura VII, observa-se que para as opções com prazos de vencimentos maiores, a curva de volatilidade é mais bem comportada, oscilando em intervalos significativamente menores. Verifica-se ainda que as opções muito dentro-do-dinheiro sofrem do mesmo problema descrito para as opções com menos de trinta dias com *moneyness* equivalente. Para as opções da Petrobrás com vencimento em 21/7 (Figura VIII), não ocorre uma queda tão pronunciada da volatilidade entre as opções fora-do-dinheiro. O formato das curvas, excluindo as opções muito dentro-do-dinheiro, sugerem uma estrutura mais próxima de um *smile*.

**Figura VII – Estruturas de Volatilidades Implícitas para Opções da Telemar com Mais de Trinta dias para o Vencimento (23 a 30 de Junho de 2003, Contratos com Expiração em 18/8)**



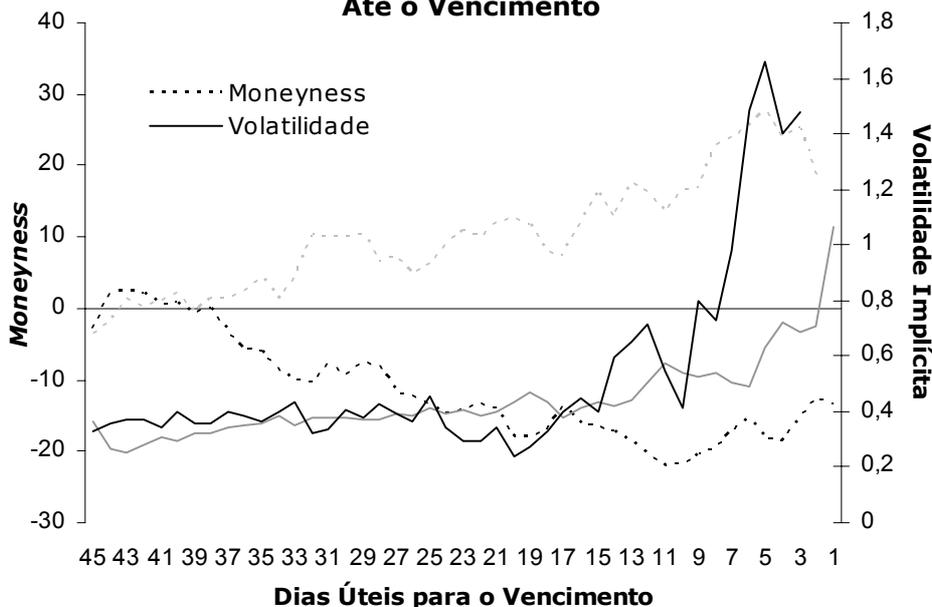
**Figura VIII – Estruturas de Volatilidades Implícitas para as Opções da Petrobrás PN com Menos de Trinta Dias para o Vencimento (23 a 30 de Junho de 2003, Contratos com Expiração em 18/8)**



Através da comparação entre as Figuras VI e VI, também é possível notar que as volatilidades parecem ser maiores para as opções mais antigas. A Figura IX ilustra essa relação através da trajetória dois contratos de opções da Telemar no primeiro semestre de 2003. As linhas tracejadas indicam a relação entre o preço à vista e o preço de exercício,

enquanto as linhas contínuas mostram o caminho das volatilidades implícitas. É possível verificar que há uma tendência à elevação da volatilidade à medida em que as opções se aproximam da data de vencimento, principalmente a partir de cerca de 15 dias úteis.

**Figura IX – Tracking das Volatilidades Implícitas das Opções da Telemar Até o Vencimento**



As diferentes volatilidades implícitas observadas em função dos preços de exercício e dos prazos de vencimento tornam razoável argumentar, portanto, que o conjunto de informação dos investidores traz expectativas não incorporadas pelas premissas do modelo de Black and Scholes, conduzindo aos erros de apreçamento. Considere a derivada parcial da fórmula de apreçamento (5) com relação à volatilidade:

$$Vega = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}N'(d_1), \quad (8)$$

$$\text{onde } N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \quad (9)$$

Como o Vega é sempre positivo, volatilidades implícitas mais altas (baixas) implicam que o modelo de Black and Scholes subestima (superestima) os preços das

opções. Dessa forma, as figuras VI e IX são evidências que o modelo tende a subestimar o preço de opções fora-do-dinheiro e com menos de um mês para o vencimento. Essa evidência é consistentemente com a discussão de Black (1975). O comportamento errático das volatilidades implícitas de opções muito fora-do-dinheiro, por sua vez, sugerem que o modelo de Black and Scholes não precifica corretamente esse tipo de opções.

Com o intuito de testar a consistência das estruturas de volatilidades implícitas das Figura VI, VII e VIII em relação a totalidade da amostra, o seguinte modelo é estimado para semestralmente para as opções da Telemar PN:

$$\begin{aligned} \sigma_{imp} = & \phi_0 + \phi_1 T + \phi_2 \hat{\sigma} + \phi_3 S + \phi_4 M + \phi_5 M \times T + \phi_6 M \times T^2 + \phi_7 Moneyness^2 + \\ & \alpha_1 Moneyness \times \lambda_1 + \alpha_2 Moneyness \times \lambda_2 + \beta_1 Moneyness \times \eta_1 + \dots + \beta_5 Moneyness \times \eta_5 \\ & + \gamma_1 Moneyness \times \lambda_1 \times M + \dots + \delta_5 Moneyness \times \eta_5 \times M + \varepsilon \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $\sigma_{imp}$  é a volatilidade implícita da opção, T o prazo em dias úteis para o vencimento, S a cotação de fechamento da ação objeto no mesmo dia em que aquele contrato é observado,  $\hat{\sigma}$  a volatilidade estimada a partir de dados históricos dos dois meses anteriores, M uma *dummy* para opções com menos de um mês para o vencimento,  $\varepsilon$  o distúrbio aleatório.  $\lambda_i$  e  $\eta_i$  são *dummies* de categoria que procuram captar as diferentes inclinações das curvas de volatilidades implícitas para diferentes faixas de *moneyness*. Como pôde ser visto nos gráficos examinados, tal inclinação tende a ser bem mais plana para opções até 10% perto do dinheiro e mais inclinada para opções muito fora-do-dinheiro. Também são inclusos termos cruzados com a *dummy* M, buscando captar a diferença para opções com menos de um mês para o vencimento. Para a estimação, dois tipos de contratos foram excluídos: opções com menos de uma semana de vencimento, que possuem pouco valor tempo (valor da opção atribuída à incerteza acerca do movimento do preço do ativo-objeto até a expiração), diminuindo a significância econômica das variações nas volatilidades implícitas, e opções com *moneyness* superior a 10, que possuem comportamento excessivamente difuso, como verificado anteriormente.

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$	$\eta_5$
<b>Moneyness</b>	>0, <5	>5, <10	>-5, <0	>-10, <-5	>-15, <-10	>-20, <-15	<-20

**Tabela XVIII – Estimação Semestral da Inclinação das Curvas de Volatilidades Implícitas for Faixas de *Moneyness* – Telemar PN**

Apresenta a estimação semestral dos coeficientes da equação (10), e as respectivas estatísticas-t (Robustas a heterocedasticidade. Ver White,1980) e p-valores.

Var. Dependente: $\sigma_{imp}$	2001.1			2001.2			2002.1		
	Coef.	t(^)	p-valor	Coef.	t(^)	p-valor	Coef.	t(^)	p-valor
Método: MQO									
$\phi_0$	1,18508	41,17	0,000	0,60193	31,23	0,000	0,23794	9,52	0,000
$T$	-0,00191	-9,26	0,000	-0,00206	-10,14	0,000	0,00043	1,63	0,103
$\hat{\sigma}$	-0,64774	-22,65	0,000	0,22358	16,44	0,000	0,51608	11,32	0,000
$S$	-0,01076	-26,70	0,000	-0,00707	-12,89	0,000	-0,00213	-3,06	0,002
$M$	0,12611	3,28	0,001	0,07362	1,46	0,145	0,15223	4,21	0,000
$M \times T$	-0,02609	-4,68	0,000	-0,01498	-2,14	0,032	-0,02532	-4,76	0,000
$M \times T^2$	0,00089	4,38	0,000	0,00053	2,07	0,039	0,00063	3,27	0,001
$Moneyness^2$	0,00021	5,34	0,000	0,00024	7,67	0,000	0,00022	8,28	0,000
$Moneyness \times \lambda_1$	-0,00040	-0,18	0,854	0,00044	0,16	0,871	-0,00077	-0,29	0,776
$Moneyness \times \lambda_2$	-0,00048	-0,43	0,667	-0,00142	-1,14	0,254	-0,00241	-1,93	0,055
$Moneyness \times \eta_1$	0,00520	2,45	0,015	0,00154	0,69	0,489	0,00551	2,23	0,026
$Moneyness \times \eta_2$	0,00531	5,50	0,000	0,00367	3,64	0,000	0,00432	3,87	0,000
$Moneyness \times \eta_3$	0,00563	7,00	0,000	0,00445	5,87	0,000	0,00459	5,65	0,000
$Moneyness \times \eta_4$	0,00610	6,91	0,000	0,00516	6,69	0,000	0,00491	6,44	0,000
$Moneyness \times \eta_5$	0,00636	5,71	0,000	0,00576	6,13	0,000	0,00489	5,48	0,000
$Moneyness \times \lambda_1 \times M$	0,00808	1,84	0,066	-0,00502	-0,73	0,464	0,02021	3,64	0,000
$Moneyness \times \lambda_2 \times M$	0,00499	2,23	0,026	0,00023	0,07	0,948	0,00528	2,16	0,031
$Moneyness \times \eta_1 \times M$	-0,01246	-2,91	0,004	0,00471	0,73	0,465	-0,01914	-3,82	0,000
$Moneyness \times \eta_2 \times M$	-0,00518	-2,97	0,003	-0,00075	-0,29	0,774	-0,00871	-4,64	0,000
$Moneyness \times \eta_3 \times M$	-0,00505	-4,77	0,000	-0,00216	-1,49	0,138	-0,00722	-6,80	0,000
$Moneyness \times \eta_4 \times M$	-0,00553	-7,27	0,000	-0,00329	-3,11	0,002	-0,00768	-10,03	0,000
$Moneyness \times \eta_5 \times M$	-0,00657	-11,21	0,000	-0,00474	-6,42	0,000	-0,00777	-13,07	0,000
<b>Obs.</b>	887			892			846		
<b>R<sup>2</sup></b>	0,82213			0,75368			0,71294		
<b>R<sup>2</sup> Ajustado</b>	0,81781			0,74773			0,70563		

Var. Dependente: $\sigma_{imp}$ Método: MQO	2002.2			2003.1			Todos		
	Coef.	t(^)	p-valor	Coef.	t(^)	p-valor	Coef.	t(^)	p-valor
$\phi_0$	1,13705	29,44	0,000	0,51268	29,66	0,000	0,41077	49,63	0,000
$T$	-0,00266	-12,31	0,000	-0,00117	-6,54	0,000	-0,00159	-12,40	0,000
$\hat{\sigma}$	0,18286	5,51	0,000	-0,75030	-11,79	0,000	0,34296	33,21	0,000
$S$	-0,02708	-25,56	0,000	0,00518	12,94	0,000	-0,00310	-20,76	0,000
$M$	0,15196	3,38	0,001	0,09171	2,81	0,005	0,10793	4,92	0,000
$M \times T$	-0,02620	-3,99	0,000	-0,01317	-2,94	0,003	-0,02010	-6,37	0,000
$M \times T^2$	0,00066	2,84	0,005	0,00038	2,36	0,018	0,00059	5,08	0,000
$Moneyness^2$	0,00019	10,19	0,000	0,00032	4,81	0,000	0,00025	17,96	0,000
$Moneyness \times \lambda_1$	-0,00553	-2,04	0,042	-0,00442	-2,90	0,004	-0,00300	-2,15	0,031
$Moneyness \times \lambda_2$	-0,00111	-0,79	0,428	-0,00458	-4,29	0,000	-0,00289	-4,48	0,000
$Moneyness \times \eta_1$	0,00594	2,52	0,012	0,00550	3,69	0,000	0,00597	4,82	0,000
$Moneyness \times \eta_2$	0,00307	2,93	0,003	0,00409	4,43	0,000	0,00420	7,69	0,000
$Moneyness \times \eta_3$	0,00388	4,95	0,000	0,00486	4,74	0,000	0,00491	12,24	0,000
$Moneyness \times \eta_4$	0,00404	6,03	0,000	0,00534	4,18	0,000	0,00513	13,71	0,000
$Moneyness \times \eta_5$	0,00426	5,90	0,000	0,00604	3,77	0,000	0,00553	12,32	0,000
$Moneyness \times \lambda_1 \times M$	0,01182	1,54	0,125	0,00163	0,45	0,652	0,00841	2,76	0,006
$Moneyness \times \lambda_2 \times M$	0,00273	0,98	0,326	0,00346	1,77	0,077	0,00506	3,60	0,000
$Moneyness \times \eta_1 \times M$	-0,00588	-1,05	0,294	0,00051	0,16	0,874	-0,00848	-2,86	0,004
$Moneyness \times \eta_2 \times M$	-0,00313	-1,45	0,146	-0,00135	-1,03	0,303	-0,00464	-3,97	0,000
$Moneyness \times \eta_3 \times M$	-0,00362	-2,84	0,005	-0,00301	-3,91	0,000	-0,00460	-6,84	0,000
$Moneyness \times \eta_4 \times M$	-0,00428	-4,90	0,000	-0,00332	-5,77	0,000	-0,00517	-10,94	0,000
$Moneyness \times \eta_5 \times M$	-0,00610	-11,29	0,000	-0,00414	-8,13	0,000	-0,00672	-21,55	0,000
<b>Obs.</b>	1191			1279			5095		
<b>R<sup>2</sup></b>	0,84269			0,60164			0,690232		
<b>R<sup>2</sup> Ajustado</b>	0,83987			0,59498			0,688950		

O modelo buscar estimar a estrutura da curva de volatilidades implícitas em função do *moneyness* dadas as volatilidades históricas, que são os estimadores mais imediatos da volatilidade para o cálculo de opções, e mais alguns fatores determinísticos, representados pelo prazo de expiração e a cotação da ação objeto no mercado à vista. Observa-se que os fatores determinísticos e os respectivos termos cruzados são todos significantes ao nível de 5% ao longo dos períodos, com exceção da dummy  $M$  em 2001.2 e de  $T$  em 2002.1, que têm os respectivos efeitos captados somente em conjunto com a outra variável. Em todos os semestres são encontradas relações negativas e significantes entre a cotação da ação no mercado à vista e a volatilidade implícita. O mesmo ocorre com o prazo de vencimento ( $T$ ):

quando mais próximo do exercício, maior é a volatilidade implícita dados os demais fatores. Os coeficientes cruzados com  $M$  também apontam que opções com menos de trinta dias para o vencimento possuem volatilidades implícitas significativamente maiores do que aquelas com maior prazo restante para a expiração.

Com relação ao *moneyness*, primeiramente nota-se que as opções dentro-do-dinheiro (isto é, com *moneyness* entre zero e dez) com mais de trinta dias para o vencimento, com a exceção do último semestre da amostra, não possuem coeficientes significativos, predominando o efeito do termo quadrático. A magnitude do termo implica que uma opção com *moneyness* de 10% tem uma volatilidade implícita cerca de dois pontos percentuais superior a uma opção no dinheiro. Na regressão geral, os dois coeficientes são significativos mas praticamente se anulam (o efeito líquido é suavemente negativo). Para opções com menos de um mês para o vencimento, existe uma relação positiva e significativa (ao nível de 5%, mas não a 1%) entre os coeficientes do *moneyness* e as volatilidades implícitas nos primeiros semestres de 2001 (*moneyness* maior do que cinco) e 2002, (note que o coeficiente positivo dos termos cruzados em  $M$  superam os coeficientes sem a *dummy*), o mesmo ocorrendo na regressão com todos os dados. Nesses casos, uma opção com *moneyness* de 10% tem uma volatilidade na casa de cinco pontos percentuais superior a opção no dinheiro (*smile*).

Para as opções fora-do-dinheiro com mais de trinta dias para o vencimento, é importante analisar os respectivos coeficientes em conjunto com o termo quadrático. Embora os primeiros isoladamente sugiram que a volatilidade implícita está diminuindo fortemente quando as opções se afastam do dinheiro, uma vez que são sempre positivos e significantes, na verdade estão sendo suavizadas pelo efeito do termo quadrático, que faz a volatilidade aumentar para opções mais fora-do-dinheiro. Entretanto, o efeito do termo quadrático é predominante para opções muito fora-do-dinheiro. No grupo das opções com menos de trinta dias, a curva torna-se bem mais inclinada para opções com *moneyness* inferiores a menos dez, sugerindo confirmando o padrão da Figura VI.

As Tabelas XIX e XX investigam as relações entre volatilidades implícitas e *moneyness* para as opções do Ibovespa e da Petrobrás respectivamente, estimando regressões para o segundo semestre de 2002, o primeiro semestre de 2003 e para o período entre 2001.1 e 2003.1. Como as opções do Ibovespa contam com poucas observações

diárias, a faixa de *moneyness* foi limitada entre menos e quinze e mais vinte, com perdas irrelevantes de contratos. Ainda foram removidos alguns termos desnecessários em relação a equação (10). Para as opções da Petrobrás, a equação (10) foi modificada para contemplar as opções com *moneyness* superior a 10%.

Em comparação com a Telemar, as regressões estimadas para as duas ações-objeto possuem menor poder explicativo da variação das volatilidades implícitas. Para as opções do Ibovespa, o coeficiente mais significativo, surpreendentemente, é o nível do próprio índice. No entanto, o termo é de pouca significância econômica: na regressão geral, para cada mil pontos a mais no índice, a volatilidade cai um ponto percentual. O resultado parece ser bastante influenciado pelo segundo semestre de 2002, onde a mesma variação no índice tem um impacto estimado de menos dez pontos percentuais na volatilidade implícita. O prazo de vencimento é significativo em 2002.2 e na regressão geral, mas não em 2003.1. A dummy M e o termo cruzado em T são consistentes com o crescimento da volatilidade implícita a menos de 15 dias úteis para o vencimento.

Os coeficientes das opções dentro-do-dinheiro com mais de trinta dias para o vencimento não são estatisticamente diferentes de zero nos dois semestres estimados. Na regressão em todos os períodos, os termos das opções com *moneyness* menor do que dez são estatística ou economicamente insignificantes. Para opções muito dentro-do-dinheiro, o coeficiente é significativo e implica que uma opção com *moneyness* de 20% tem uma diferença estimada na volatilidade implícita de 6,4 p.p. em relação a uma opção com mesmo prazo de vencimento no dinheiro (observada na mesma data). Nas opções dentro-do-dinheiro com menos de trinta dias para o vencimento, as curvas de volatilidade seguem padrão semelhante, possuindo coeficientes insignificantes ou diminutos para opções com *moneyness* de até 10% e configurando um *smile* com as opções muito dentro-do-dinheiro. Não obstante, a característica errática das volatilidades implícitas dessas opções, embora atenuada para as opções sobre o índice, ainda influencia a variância do estimador, levando a rejeição dos coeficientes em alguns casos. Com relação às opções fora-do-dinheiro, não existem evidências de que o *moneyness* influencia as volatilidades implícitas.

**Tabela XIX – Estimação Semestral da Inclinação das Curvas de Volatilidades  
Implícitas for Faixas de *Moneyness* – Ibovespa**

Var. Dependente: $\sigma_{imp}$ Método: MQO	2002.2			2003.1			2001.1-2003.1		
	Coef.	t(^)	p-valor	Coef.	t(^)	p-valor	Coef.	t(^)	p-valor
$\phi_0$	1,5635	13,71	0,0000	0,5056	5,36	0,0000	0,2976	15,32	0,0000
$T$	0,0001	0,81	0,4212	0,0000	0,79	0,4279	0,0001	2,03	0,0428
$\hat{\sigma}$	-0,0735	-0,47	0,6373	0,0460	0,20	0,8385	0,4140	13,32	0,0000
$S$	-0,0001	-14,93	0,0000	-1,72E-5	-4,93	0,0000	-8,73E-6	-8,48	0,0000
$M$	0,1152	2,44	0,0154	0,0490	1,32	0,1869	0,0658	3,47	0,0005
$M \times T$	-0,0073	-2,98	0,0032	-0,0036	-1,23	0,2195	-0,0030	-2,61	0,0091
$Moneyness \times \lambda_1$	0,0049	1,09	0,2764	0,0020	0,97	0,3306	0,0062	2,95	0,0032
$Moneyness \times \lambda_2$	0,0011	0,50	0,6165	0,0007	0,52	0,6002	0,0014	1,55	0,1203
$Moneyness \times \lambda_3$	0,0054	1,88	0,0610	-0,0002	-0,19	0,8499	0,0032	3,12	0,0019
$Moneyness \times \lambda_4$	0,0010	0,33	0,7405	0,0025	1,23	0,2198	0,0032	1,98	0,0484
$Moneyness \times \eta_1$	0,0053	0,96	0,3392	0,0027	1,67	0,0951	-0,0038	-2,46	0,0142
$Moneyness \times \eta_2$	0,0015	0,96	0,3383	0,0017	2,17	0,0305	-0,0007	-0,92	0,3601
$Moneyness \times \eta_3$	0,0006	0,35	0,7281	0,0021	3,50	0,0005	-0,0011	-1,93	0,0538
$Moneyness \times \lambda_1 \times M$	-0,0179	-1,74	0,0822	0,0058	0,87	0,3861	-0,0085	-1,96	0,0498
$Moneyness \times \lambda_2 \times M$	-0,0055	-1,03	0,3041	0,0133	2,23	0,0267	0,0019	0,72	0,4703
$Moneyness \times \lambda_3 \times M$	-0,0045	-1,06	0,2914	0,0110	1,74	0,0821	0,0089	2,71	0,0069
$Moneyness \times \lambda_4 \times M$	0,0108	1,07	0,2853	0,0122	2,64	0,0087	0,0090	3,27	0,0011
$Moneyness \times \eta_1 \times M$	-0,0002	-0,02	0,9867	-0,0047	-0,93	0,3509	0,0071	2,16	0,0311
$Moneyness \times \eta_2 \times M$	0,0007	0,16	0,8733	-0,0030	-1,29	0,1997	0,0009	0,57	0,5686
$Moneyness \times \eta_3 \times M$	0,0013	0,48	0,6343	-0,0052	-3,12	0,0020	-0,0011	-1,04	0,3005
<b>Obs.</b>	295			337			1675		
<b>R<sup>2</sup></b>	0,5282			0,4533			0,3067		
<b>R<sup>2</sup> Ajustado</b>	0,4956			0,4205			0,2988		

	$\lambda_4$	$\lambda_5$
<b>Moneyness</b>	>15, 20<	>20

**Tabela XX – Estimação Semestral da Inclinação das Curvas de Volatilidades  
Implícitas for Faixas de *Moneyness* – Petrobrás PN**

Var. Dependente: $\sigma_{imp}$ Método: MQO	2002.2			2003.1			2001.1-2003.1		
	Coef.	t(^)	p-valor	Coef.	t(^)	p-valor	Coef.	t(^)	p-valor
$\phi_0$	1,1863	23,27	0,0000	0,7653	8,81	0,0000	0,5194	25,75	0,0000
$T$	-0,0014	-5,57	0,0000	-0,0002	-0,78	0,4375	-0,0004	-3,98	0,0001
$\hat{\sigma}$	0,0226	0,60	0,5506	0,0287	0,34	0,7308	0,2191	12,88	0,0000
$S$	-0,0183	-20,84	0,0000	-0,0089	-7,24	0,0000	-0,0050	-17,01	0,0000
$M$	0,0892	2,60	0,0095	0,0520	1,73	0,0841	0,0718	3,97	0,0001
$M \times T$	-0,0063	-1,26	0,2077	-0,0088	-1,98	0,0484	-0,0095	-3,51	0,0005
$M \times T^2$	0,0000	0,02	0,9872	0,0003	1,66	0,0973	0,0002	2,31	0,0208
$Moneyness^2$	0,0001	1,02	0,3080	-0,0001	-0,78	0,4361	0,0002	5,48	0,0000
$Moneyness \times \lambda_1$	0,0031	0,89	0,3721	-0,0047	-1,54	0,1248	-0,0016	-1,00	0,3193
$Moneyness \times \lambda_2$	0,0024	1,44	0,1515	-0,0013	-0,72	0,4700	-0,0011	-1,32	0,1882
$Moneyness \times \lambda_3$	0,0009	0,63	0,5259	0,0000	0,03	0,9782	-0,0012	-1,69	0,0908
$Moneyness \times \lambda_4$	0,0038	2,48	0,0133	0,0024	1,06	0,2872	-0,0009	-1,00	0,3157
$Moneyness \times \lambda_5$	0,0061	3,30	0,0010	0,0076	2,56	0,0105	0,0013	1,12	0,2610
$Moneyness \times \eta_1$	0,0005	0,17	0,8664	0,0024	0,75	0,4511	0,0036	2,23	0,0259
$Moneyness \times \eta_2$	0,0012	0,82	0,4100	0,0010	0,59	0,5528	0,0032	4,12	0,0000
$Moneyness \times \eta_3$	0,0001	0,10	0,9211	0,0004	0,22	0,8237	0,0019	2,64	0,0084
$Moneyness \times \eta_4$	0,0004	0,26	0,7917	0,0016	0,69	0,4894	0,0023	2,75	0,0059
$Moneyness \times \eta_5$	-0,0004	-0,18	0,8605	-0,0031	-1,04	0,2980	0,0045	3,67	0,0002
$Moneyness \times \lambda_1 \times M$	-0,0050	-0,93	0,3513	0,0100	2,25	0,0247	0,0035	1,34	0,1803
$Moneyness \times \lambda_2 \times M$	-0,0012	-0,44	0,6571	0,0098	4,80	0,0000	0,0053	4,39	0,0000
$Moneyness \times \lambda_3 \times M$	0,0083	4,37	0,0000	0,0105	6,85	0,0000	0,0098	10,86	0,0000
$Moneyness \times \lambda_4 \times M$	0,0086	4,65	0,0000	0,0164	9,27	0,0000	0,0119	12,43	0,0000
$Moneyness \times \lambda_5 \times M$	0,0063	3,31	0,0010	0,0090	5,07	0,0000	0,0104	13,74	0,0000
$Moneyness \times \eta_1 \times M$	-0,0021	-0,44	0,6608	-0,0053	-1,22	0,2237	-0,0046	-1,84	0,0653
$Moneyness \times \eta_2 \times M$	-0,0007	-0,37	0,7136	-0,0054	-2,80	0,0053	-0,0048	-4,48	0,0000
$Moneyness \times \eta_3 \times M$	-0,0017	-1,30	0,1929	-0,0059	-3,97	0,0001	-0,0045	-6,04	0,0000
$Moneyness \times \eta_4 \times M$	-0,0037	-3,33	0,0009	-0,0080	-5,05	0,0000	-0,0053	-7,49	0,0000
$Moneyness \times \eta_5 \times M$	-0,0035	-3,95	0,0001	-0,0050	-3,74	0,0002	-0,0071	-11,07	0,0000
<b>Obs.</b>	960			1107			4632		
<b>R<sup>2</sup></b>	0,6628			0,4814			0,5053		
<b>R<sup>2</sup> Ajustado</b>	0,6530			0,4684			0,5024		

Com relação às opções da Petrobrás,  $S$  torna a ser altamente significativa e novamente surgem fortes evidências de que os contratos com menos de mês para o vencimento apresentam volatilidades implícitas maiores. Para as opções dentro-do-dinheiro com mais de um mês para o vencimento e *moneyness* inferior a 20%, o modelo rejeita a hipótese de volatilidades implícitas maiores que as opções no dinheiro em 2002.2 e 2003.1, tudo mais constante. Aquelas com *moneyness* superior a 20%, por sua vez, possuem volatilidades implícitas significativamente maiores. Na regressão nos dados de 2001 a 2003, os coeficientes também não são significantes, mas o termo quadrático do *moneyness* passa a sê-lo. Estima-se que opções com *moneyness* de 10% e 20% possuam volatilidades implícitas 1,6 p.p. e 6,7 p.p. maiores dos que as opções no dinheiro respectivamente. Nas opções com menos de trinta dias, entretanto, o efeito do *moneyness* passa a ser muito pronunciado a medida que a opção fica mais dentro-do-dinheiro. Um *moneyness* de 20%, por exemplo, implica em uma diferença estimada de 17 p.p. em relação a uma opção no dinheiro.

Nas opções fora-do-dinheiro com mais de um mês para o vencimento, a estimação com todos os dados tem resultados são muito semelhantes aos das opções da Telemar. Os coeficientes para as faixas de *moneyness*, embora positivos, suavizam o termo quadrático, que eleva a volatilidade para opções mais fora do dinheiro. Não obstante, o modelo rejeita qualquer diferença entre as volatilidades das opções fora-do-dinheiro e no dinheiro em 2002.2 e 2003.1. Para opções com menos de um mês para o vencimento, o modelo respalda o formato da Figura VI, com opções mais fora-do-dinheiro possuindo volatilidades implícitas significativamente maiores.

A análise desempenhada nesse capítulo mostra a existência de inequívocas evidências desfavoráveis ao modelo de Black and Scholes no mercado de opções de compra da Bovespa. Em contraposição à premissa de volatilidade constante, é possível avaliar que as volatilidades implícitas possuem relações significantes com prazos de vencimento, o valor nominal da ação-objeto e o grau em que as opções se encontram fora ou dentro do dinheiro.

De fato, Black (1975) já postulava que as falhas do modelo de Black and Scholes em descrever as estruturas reportadas dos preços das opções estão principalmente associadas à esta hipótese. Entretanto, relaxá-la não é uma tarefa trivial. Se a volatilidade

for tratada como uma variável estocástica, o apuração de opções é dependente do valor de mercado do parâmetro de risco, de difícil estimação (Hull e White, 1987). Duan (1995), por sua vez, desenvolve o conceito de *locally risk neutral valuation relationship* para criar um modelo de apuração consistente com processos GARCH, que contemplam, por exemplo, o excesso de curtose das distribuições dos retornos das ações. Araújo e Figueiredo (2003) testam a eficiência do modelo de Duan para as opções da Telebrás de 1995 a 2000.

Um caso mais simples ocorre quando a volatilidade é uma função determinística do preço dos ativos e do tempo (Rubinstein, 1994 e Dumas, Fleming and Whaley, 1998), o que ainda permite o apuração de opções baseado na equação diferencial de Black and Scholes<sup>8</sup>, preservando o argumento da arbitragem que está por trás deste modelo. Cox e Ross (1976), por exemplo, utilizam o modelo de elasticidade constante da variância para formular uma fórmula de apuração consistente com a relação negativa entre  $S$  e as volatilidades implícitas. Os autores postulam que aumentos nas volatilidades estão associados a quedas nos preços das ações porque tais movimentos indicam piores desempenhos operacionais das firmas, que possuem custos fixos (por definição) independentes dessa performance.

---

<sup>8</sup> Embora não através da fórmula de B&S em si (Dumas, Fleming and Whaley, 1998).

#### 4. Análise de Apreçamento

A análise das volatilidades implícitas da seção anterior apresentou uma série de evidências que mostram que o modelo de Black and Scholes não é capaz de descrever as estruturas reportadas para as volatilidades implícitas das opções da Telemar, do Ibovespa e da Petrobrás, principalmente no caso de contratos com pouco tempo para o vencimento. Este capítulo destina-se a examinar quais contratos de opções são apreçados corretamente ou incorretamente pelo modelo, procurando identificar as tendências sistemáticas de erro.

Inicialmente, alguns aspectos preliminares devem ser levados em conta. Um problema recorrentemente ressaltado na literatura para o teste de hipóteses sobre a eficiência do apreçamento de opções é que a inferência a partir dos preços reportados das mesmas sempre deve contemplar uma hipótese conjunta acerca da eficiência de mercado (Galai, 1977, Chiras e Manaster, 1978). Tal restrição é necessária porque se uma opção apresenta baixa liquidez, torna-se menos provável que as cotações de fechamento no mercado à vista estejam refletidas nos preços de opções disponíveis na base de dados, distorcendo drasticamente os resultados obtidos com a utilização do modelo de Black and Scholes. Neste caso, é fundamental ter o cuidado de separar o efeito deste fator na avaliação dos erros de apreçamento.

Outra restrição é originada pelo perfil de curto prazo das opções do mercado. Define-se como valor-tempo a parcela do valor da opção atribuída ao período restante para a maturidade, representando o valor do componente de incerteza do contrato. O restante do valor da opção de compra é dado pelo valor intrínseco, definido como o máximo entre o excesso do valor de mercado da ação sobre o preço de exercício e zero. Quanto menor forem os prazos de vencimento, menor será o valor tempo, e conseqüente, menos haverá para ser explicado através do modelo de apreçamento. McBeth e Merville (1979), por exemplo, partem da hipótese que o modelo de B&S precifica corretamente opções com mais de 90 dias corridos para o vencimento para analisar os erros de apreçamento de 6 opções da CBOE (Chicago Board Options Exchange). Assim sendo, é possível que a amostra brasileira já implique um viés desfavorável ao modelo de Black and Scholes.

Por último, ainda existe a restrição de que as opções da amostra são do tipo americanas. Como o modelo de Black and Scholes destina-se ao apreçamento de opções européias, esse poderia ser um fator de preocupação, uma vez é possível demonstrar que o

pagamento de dividendos durante a vida da opção introduz uma probabilidade positiva de exercício antes do vencimento, que possui um prêmio não contemplado pelo modelo.<sup>9</sup> No entanto, as opções brasileiras são protegidas contra dividendos, e assim como Black e Scholes (1972), que estudaram opções protegidas negociadas em mercados de balcão, optou-se por não descartar essas observações e testar se esse problema é realmente relevante.

Começamos a análise testando a hipótese de que as  $n$  opções mais líquidas diariamente são apreçadas corretamente pelo modelo. Para cada ano, a seguinte equação é estimada:

$$C_i = \alpha_0 + \alpha_1 C(BS)_i + \varepsilon_i \quad (11)$$

onde  $C$  é o preço de mercado da opção  $i$  e  $C(BS)$  o respectivo valor pelo modelo de Black and Scholes. Testar a hipótese que o modelo de Black and Scholes apreça corretamente as opções equivale a testar a hipótese conjunta de que  $\alpha_0 = 0$  e  $\alpha_1 = 1$ , o que é realizado através de um teste F.

Os resultados são apresentados pela Tabela XXI. Como esperado, todas as regressões apresentam coeficientes de determinação muito elevados (acima de 0,9). Para os três contratos mais líquidos, os preços de mercado são plenamente consistentes com o modelo de Black and Scholes em todos os períodos, à exceção do último semestre. A não significância da constante, o  $R^2$  próximo da unidade, e o coeficiente maior que um do preço de Black and Scholes sugerem que o modelo subestimou os preços das opções neste último caso, e um novo teste F mostra que não é possível rejeitar  $\alpha_1 = 1,05$ . Essa tendência ainda é compatível com as análises dos capítulos anteriores, uma vez que o ano de 2003 registrou elevados ganhos de participação das opções de menor maturidade, com volatilidades implícitas mais altas.

As opções fora do grupo das três mais líquidas apresentam resultados muito semelhantes entre si. As evidências foram amplamente favoráveis ao modelo de Black and Scholes em 2001 e no segundo semestre de 2002, mas contrárias nos demais períodos. Como as constantes são sempre aceitas nestes últimos casos, não é possível delinear nenhum viés de apreçamento através do modelo estimado.

---

<sup>9</sup> Whaley (1981) desenvolve uma fórmula consistente com essa possibilidade.

**Tabela XXI – Estimação Semestral da Eficiência do Modelo de Black and Scholes por Classes de Liquidez**

Utiliza a regressão linear da equação (11) para testar a eficiência do modelo de Black and Scholes no apreçamento dos 25 contratos mais líquidos diariamente no mercado do Bovespa (ver tabelas XI e XIV), que representam mais de 99% do mercado. A coluna ranking indica que as observações foram os contratos três mais líquidos a cada dia, dos quartos aos sextos mais líquidos, e assim por diante. Verifica-se, a partir de um teste F, a hipótese nula de que a constante seja zero e o coeficiente do preço de Black and Scholes seja 1. A rejeição da hipótese configura evidência contrária ao modelo. Todas as estatísticas de teste são consistentes com a heterocedasticidade dos erros.

Ranking	Semestre	$\hat{\alpha}_0$	$t(\hat{\alpha}_0)$	p-valor	$\hat{\alpha}_1$	$t(\hat{\alpha}_1)$	p-valor	F	p-valor	R <sup>2</sup>
1-3	2000.1	0,355	2,39	0,017	0,984	35,28	0,000	2,99	0,052	0,997
	2000.2	0,686	0,99	0,325	1,048	40,02	0,000	1,67	0,189	0,994
	2001.1	-0,657	-0,93	0,355	1,008	100,72	0,000	0,99	0,372	0,997
	2001.2	0,398	1,16	0,246	1,017	29,95	0,000	1,06	0,348	0,993
	2002.1	2,888	1,13	0,260	1,025	25,61	0,000	0,64	0,530	0,941
	2002.2	1,204	1,32	0,187	0,997	13,57	0,000	0,93	0,394	0,929
	2003.1	-0,083	-0,85	0,397	1,157	42,52	0,000	23,38	0,000	0,996
4-6	2000.1	-2,144	-1,82	0,069	1,309	8,79	0,000	2,36	0,096	0,992
	2000.2	1,853	2,14	0,033	1,064	41,11	0,000	5,01	0,007	0,990
	2001.1	-2,704	-1,36	0,174	0,998	47,73	0,000	1,8	0,168	0,989
	2001.2	2,714	2,09	0,038	0,983	65,98	0,000	2,67	0,071	0,985
	2002.1	11,316	3,18	0,002	1,027	67,10	0,000	5,87	0,003	0,958
	2002.2	6,647	2,92	0,004	0,996	72,91	0,000	4,26	0,015	0,976
	2003.1	6,617	4,25	0,000	1,045	70,02	0,000	22,42	0,000	0,991
7-10	2000.1	2,746	2,72	0,007	1,146	50,56	0,000	28,37	0,000	0,988
	2000.2	12,931	5,01	0,000	1,063	54,15	0,000	34,03	0,000	0,981
	2001.1	-0,325	-0,18	0,856	0,992	79,95	0,000	0,3	0,739	0,991
	2001.2	5,447	1,36	0,174	0,920	20,30	0,000	1,6	0,203	0,957
	2002.1	4,157	2,69	0,007	1,040	67,32	0,000	9,16	0,000	0,981
	2002.2	2,553	1,95	0,052	0,984	58,58	0,000	2,01	0,135	0,979
	2003.1	6,663	5,50	0,000	1,044	91,25	0,000	30,51	0,000	0,989
10-15	2000.1	7,364	2,66	0,008	1,078	12,18	0,000	25,75	0,000	0,952
	2000.2	15,143	5,51	0,000	1,135	37,32	0,000	64,44	0,000	0,964
	2001.1	1,761	1,20	0,230	0,986	83,75	0,000	1,35	0,260	0,986
	2001.2	0,278	0,21	0,835	0,997	58,00	0,000	0,03	0,972	0,979
	2002.1	1,193	1,67	0,096	1,031	37,67	0,000	3,48	0,031	0,973
	2002.2	0,514	0,39	0,696	0,961	25,59	0,000	1,16	0,315	0,975
	2003.1	5,074	5,04	0,000	1,059	72,19	0,000	45,04	0,000	0,992
15-25	2000.1	4,947	5,73	0,000	1,112	39,16	0,000	34,95	0,000	0,972
	2000.2	8,459	7,76	0,000	1,050	44,58	0,000	43,92	0,000	0,969
	2001.1	-1,113	-1,27	0,203	1,015	61,76	0,000	0,89	0,410	0,987
	2001.2	1,597	1,60	0,109	0,963	19,72	0,000	1,42	0,241	0,950
	2002.1	0,784	1,48	0,140	1,035	18,70	0,000	3,8	0,023	0,958
	2002.2	1,109	0,71	0,481	0,907	5,79	0,000	0,32	0,728	0,917
	2003.1	1,477	3,43	0,001	1,052	39,66	0,000	32,01	0,000	0,990

Buscando estabelecer as relações entre os erros de apreçamento e as respectivas causas discutidas ao longo do trabalho, define-se a variável de erro percentual de apreçamento:

$$\xi_i = \left( \frac{C(BS)_i}{C_i} - 1 \right) \times 100 \quad (12)$$

Primeiramente, considere o problema introduzido pela probabilidade de exercício antecipado das opções americanas com pagamentos de dividendos entre a data de observação e a expiração. Cerca de 10% do total da amostra apresenta essa característica. Seja  $A$  uma *dummy* que identifica esses contratos. Estima-se, para todos os períodos, a seguinte equação:

$$\xi_i = \alpha_0 + \alpha_1 A_i + \varepsilon_i \quad (13)$$

**Tabela XXII – Estimação do Efeito do Pagamento de Dividendos sobre o Erro Absoluto de Apreçamento do Modelo de Black and Scholes**

Ano	$\hat{\alpha}_0$	$t(\hat{\alpha}_0)$	p-valor	$\hat{\alpha}_1$	$t(\hat{\alpha}_1)$	p-valor	obs	R <sup>2</sup>
2000	34.74	25.77	0.000	5.1941	1.8	0.072	7477	0.0002
2001	41.92	50.9	0.000	4.1225	1.3	0.195	8691	0.0003
2002	39.38	46.95	0.000	-5.050	-3.25	0.001	9206	0.0006
2003	23.47	52.97	0.000	1.5617	0.24	0.813	5492	0.0001
<b>Todos</b>	36.10	74.43	0.000	0.9303	0.55	0.585	30866	0.0000

A regressão da Tabela XXII mostra que os dividendos não introduzem um efeito significativo sobre os erros de apreçamento das opções americanas. O coeficiente só não é rejeitado em 2002, quando aparece com o sinal trocado (os erros para essas opções seriam menores). Testes para diferentes ações-objeto não trazem resultados diferentes e foram omitidos.

A análise do capítulo 3 mostrou a existência de uma forte relação entre prazos de vencimento e volatilidades implícitas. Com o objetivo de investigar o efeito sobre os erros de apreçamento, a equação (14) testa a magnitude da anomalia decorrente desse efeito pelos seguintes tipos de contrato: opções com menos de duas, entre três e quatro, e entre cinco e nove semanas para o vencimento. São realizadas estimações para as opções escritas sobre as ações Telemar PN, Petrobrás PN, Globo Cabo PN, Telesp Celular PN e sobre o Ibovespa.

$$\xi_i = \alpha_0 + \alpha_1(T \leq 10)_i + \alpha_2(10 < T \leq 20)_i + \alpha_3(20 < T \leq 45)_i + \varepsilon_i \quad (14)$$

**Tabela XXIII – Estimação do Efeito do Prazo de Vencimento Sobre o Erro Percentual de Apreçamento do Modelo de Black and Scholes**

<i>Vencimento</i> <i>Dias Úteis</i>	<b>Telemar PN</b>			<b>Ibovespa</b>			<b>Petrobrás PN</b>		
	$\hat{\alpha}_j$	$t(\hat{\alpha}_j)$	p-valor	$\hat{\alpha}_j$	$t(\hat{\alpha}_j)$	p-valor	$\hat{\alpha}_j$	$t(\hat{\alpha}_j)$	p-valor
<b>Intercepto</b>	17,79	10,38	0,000	-5,48	-1,56	0,120	7,05	4,52	0,000
<b>0-10</b>	-41,58	-19,25	0,000	24,42	1	0,316	-19,34	-2,45	0,014
<b>11-20</b>	-28,92	-12,58	0,000	-7,98	-2,07	0,038	-14,51	-7,89	0,000
<b>21-45</b>	-1,48	-0,69	0,490	2,72	0,54	0,587	6,47	2,89	0,004
<b>Obs.</b>	10210			2696			7094		
<b>R<sup>2</sup></b>	0,0465			0,0023			0,0049		

<i>Vencimento</i> <i>Dias Úteis</i>	<b>Globo Cabo PN</b>			<b>Telesp Cel PN</b>		
	$\hat{\alpha}_j$	$t(\hat{\alpha}_j)$	p-valor	$\hat{\alpha}_j$	$t(\hat{\alpha}_j)$	p-valor
<b>Intercepto</b>	1,57	1,31	0,191	2,65	1,48	0,138
<b>0-10</b>	-22,18	-11,32	0,000	-17,52	-6	0,000
<b>11-20</b>	-6,74	-3,24	0,001	-6,33	-2,52	0,012
<b>21-45</b>	12,07	7,2	0,000	7,61	3,14	0,002
<b>Obs.</b>	6657			3053		
<b>R<sup>2</sup></b>	0,0437			0,032		

Os resultados mostram que o modelo de Black and Scholes subestima os preços das opções com menos de 20 dias úteis para o vencimento em todas as ações-objeto, com exceção dos contratos sobre o Ibovespa a menos de duas semanas para a expiração. A estimação também traz evidências que o modelo sub-apreça as opções da Petrobrás, Globo Cabo e Telesp Celular com mais de um mês de maturidade.

Por fim, a Tabela XXIV apresenta os erros médios de apreçamento para as opções agrupadas pelo *moneyness*. No geral, o erro médio de apreçamento do modelo de Black and Scholes foi bastante reduzido para as opções da Telemar PN e do Ibovespa dentro-do-dinheiro, tanto para aquelas com mais de trinta dias de maturidades quanto para as demais. As ações-objeto menos líquidas, por sua vez, apresentaram erros absolutos médios superiores, mas não muito elevados. O mesmo não acontece para as opções fora-do-dinheiro, que incorreram em erros percentuais médios muito acentuados e dispersos. As

exceções ficam por conta das opções da Telemar a menos de trinta dias da expiração com *moneyness* superior a 10% negativos.

**Tabela XXIV – Erros Percentuais Médios de Apreçamento do Modelo de Black and Scholes, por *Moneyness***

<b>Prazo</b>	<b><i>Moneyness</i></b>	<b>Telemar PN</b>	<b>Ibovespa</b>	<b>Petrobrás PN</b>	<b>Globo Cabo PN</b>	<b>Telesp Cel PN</b>
<b>&gt;30</b>	<b>&lt;-20</b>	39,4123	178,21	0,4837	3,7723	-16,9948
	<b>(-20,-10)</b>	35,3515	-21,357	36,4642	24,1762	13,5798
	<b>(-10,-4)</b>	15,8294	-9,1666	22,1815	17,6396	20,4373
	<b>(-4,0)</b>	7,48308	-6,4149	10,1146	11,2921	30,2780
	<b>(0,4)</b>	3,80184	-4,3626	5,1409	13,3243	14,4169
	<b>(4,10)</b>	1,74210	-2,2813	5,0843	12,2455	6,3228
	<b>(10,20)</b>	2,12492	1,7684	4,8116	7,2690	6,4890
	<b>&gt;20</b>	2,22406	2,9329	3,5235	2,7306	4,5502
<b>&lt;30</b>	<b>&lt;-20</b>	-74,808	-47,056	22,8303	-72,1863	-82,1501
	<b>(-20,-10)</b>	-26,726	-47,224	-50,8474	-11,5810	-10,6529
	<b>(-10,-4)</b>	0,54425	-19,068	-10,4418	7,1383	14,6313
	<b>(-4,0)</b>	5,80029	49,808	2,9815	11,3346	16,4111
	<b>(0,4)</b>	-1,0795	-6,4101	2,2364	7,1754	11,2924
	<b>(4,10)</b>	-5,1427	1,2183	-4,0275	6,4782	1,8084
	<b>(10,20)</b>	-5,4935	1,0153	-2,1282	-0,4113	-0,6370
	<b>&gt;20</b>	-3,3089	2,6445	-3,6911	-1,3782	-4,2097

Para estimar as tendências de erros de apreçamento, estima-se para cada categoria acima, englobando contratos da Telemar PN, Bovespa e Petrobrás PN,

$$\xi_i = \alpha_0 + \alpha_1 Moneyness_i + \varepsilon_i \quad (15)$$

A Tabela XXV mostra os resultados para as opções da Telemar PN. No grupo das opções com mais de trinta dias para expiração, os Testes F conduzem a rejeição da hipótese que as opções dentro-do-dinheiro são apreçadas erroneamente, uma vez que implicam que nenhum dos termos da regressão é significativo. A média do erro, estimada pela constante, não é significativamente diferente de zero. Nas opções fora-do-dinheiro, entretanto, surge um padrão difuso. No caso das opções com *moneyness* de até -20%, não é possível rejeitar que há um viés de sobre-apreçamento (o coeficiente multiplicado pelo dinheiro negativo fica positivo). No entanto, quando as opções tornam-se muito fora-do-dinheiro, a tendência se inverte e o modelo subestima sistematicamente os preços de mercado. É interessante notar, em contraposição às opções dentro-do-dinheiro, que os erros de apreçamento são conjugados com a iliquidez das opções fora-do-dinheiro. Nos contratos de curtíssimo prazo (menos de um mês para o vencimento), a estimação não rejeita que as opções no dinheiro

(*moneyness* absoluto de até 4%) e dentro-do-dinheiro são apreçadas corretamente. As opções fora-do-dinheiro remetem diretamente à Figura XIV, sendo sistematicamente sub-apreçadas.

**Tabela XXV – Estimação do Erro de Apreçamento para Opções Classificadas pelo *Moneyness* – Telemar PN**

Prazo	<i>Moneyness</i>	$\hat{\alpha}_0$	$t(\hat{\alpha}_0)$	p-valor	$\hat{\alpha}_1$	$t(\hat{\alpha}_1)$	p-valor	p>F	obs	R <sup>2</sup>
>30	<-20	129,86	4,16	0,00	3,419	3,07	0,002	0,002	792	0,009
	(-20,-10)	-14,41	-0,91	0,36	-3,374	-2,86	0,004	0,004	1168	0,009
	(-10,-4)	2,264	0,4	0,69	-1,916	-2,19	0,029	0,029	789	0,005
	(-4,0)	-2,189	-0,95	0,34	-4,852	-3,48	0,001	0,001	511	0,027
	(0,4)	3,773	1,7	0,09	-0,015	-0,02	0,986	0,986	469	0,000
	(4,10)	3,253	1,32	0,19	-0,218	-0,66	0,508	0,508	602	0,001
	(10,20)	4,371	1,72	0,09	-0,154	-0,93	0,355	0,355	715	0,002
>20	1,540	1,46	0,14	0,021	0,65	0,517	0,517	682	0,001	
<30	<-20	14,464	0,84	0,40	3,318	6,22	0,000	0,000	630	0,051
	(-20,-10)	21,287	1,18	0,24	3,180	2,52	0,012	0,012	837	0,007
	(-10,-4)	34,898	2,68	0,01	4,395	2,29	0,023	0,023	502	0,012
	(-4,0)	8,682	1,93	0,05	-0,874	-0,35	0,723	0,723	315	0,001
	(0,4)	6,903	2,61	0,01	-1,875	-1,83	0,068	0,068	321	0,010
	(4,10)	-1,801	-0,76	0,45	0,133	0,44	0,660	0,660	398	0,001
	(10,20)	-0,384	-0,25	0,80	0,017	0,17	0,862	0,862	529	0,000
>20	-0,822	-1,03	0,30	0,038	1,44	0,151	0,151	793	0,009	

As opções do índice Bovespa são analisadas na Tabela XXVI. Surpreendentemente, estes contratos apresentam um padrão extremamente bem comportado, tendo como único coeficiente significativo o termo da opção no dinheiro com *moneyness* positivo e menos de trinta dias. Embora os interceptos das observações extremas sejam rejeitados, fica claro que o modelo de Black and Scholes não é adequado para descrever essas opções. O aspecto errático dos interceptos destes contratos é explicado pela baixíssima liquidez. Para as séries mais líquidas, o modelo de Black and Scholes é bastante satisfatório.

Para as opções da Petrobrás com mais de trinta dias, predominam os efeitos dos *smiles*. As opções fora-do-dinheiro com *moneyness* moderado (mais líquidas) possuem inclinações não significantes e interceptos negativos, enquanto nas opções dentro do dinheiro ocorre o contrário. Nesse caso, existem evidências que o modelo de Black and Scholes, em média, subestima um pouco o valor das opções afastadas do dinheiro. Para as opções com menos de trinta dias, é muito difícil estabelecer um padrão claro.

**Tabela XXVI – Estimação do Erro de Apreçamento para Opções  
Classificadas pelo *Moneyness* – Ibovespa**

<b>Prazo</b>	<b><i>Moneyness</i></b>	$\hat{\alpha}_0$	$t(\hat{\alpha}_0)$	<b>p-valor</b>	$\hat{\alpha}_1$	$t(\hat{\alpha}_1)$	<b>p-valor</b>	<b>p&gt;F</b>	<b>obs</b>	<b>R<sup>2</sup></b>
<b>&gt;30</b>	<b>&lt;-20</b>	334,34	0,45	0,659	5,788	0,24	0,809	0,8093	34	0,002
	<b>(-20,-10)</b>	-9,432	-0,53	0,599	0,899	0,64	0,524	0,5238	240	0,0019
	<b>(-10,-4)</b>	-21,73	-2,89	0,004	-1,817	-1,72	0,085	0,0853	397	0,0071
	<b>(-4,0)</b>	-1,958	-0,56	0,579	2,229	1,73	0,084	0,0845	301	0,0062
	<b>(0,4)</b>	-2,953	-0,9	0,368	-0,679	-0,56	0,574	0,5742	266	0,001
	<b>(4,10)</b>	-11,90	-3,13	0,002	1,461	2,44	0,015	0,0155	250	0,0171
	<b>(10,20)</b>	-10,52	-1,26	0,210	0,912	1,49	0,138	0,1383	185	0,0159
	<b>&gt;20</b>	-7,664	-0,83	0,412	0,389	1,01	0,315	0,3153	74	0,017
<b>&lt;30</b>	<b>&lt;-20</b>	65,376	0,41	0,693	4,718	0,89	0,398	0,3975	11	0,0232
	<b>(-20,-10)</b>	46,486	0,85	0,398	7,077	1,95	0,054	0,0535	110	0,0397
	<b>(-10,-4)</b>	8,980	0,6	0,551	4,162	1,87	0,063	0,0633	185	0,0143
	<b>(-4,0)</b>	117,19	0,82	0,413	33,694	0,69	0,492	0,4921	185	0,0038
	<b>(0,4)</b>	-9,160	-2,67	0,008	2,271	1,71	0,090	0,0902	143	0,0215
	<b>(4,10)</b>	-0,305	-0,04	0,969	0,309	0,24	0,807	0,8071	172	0,0004
	<b>(10,20)</b>	1,016	0,2	0,842	0,000	0	1,000	0,9998	112	0,0000
	<b>&gt;20</b>	-5,224	-0,82	0,418	0,253	1,03	0,314	0,3136	26	0,0647

**Tabela XXV – Estimação do Erro de Apreçamento para Opções Classificadas  
pelo *Moneyness* – Petrobrás PN**

<b>Prazo</b>	<b><i>Moneyness</i></b>	$\hat{\alpha}_0$	$t(\hat{\alpha}_0)$	<b>p-valor</b>	$\hat{\alpha}_1$	$t(\hat{\alpha}_1)$	<b>p-valor</b>	<b>p&gt;F</b>	<b>obs</b>	<b>R<sup>2</sup></b>
<b>&gt;30</b>	<b>&lt;-20</b>	1,477	5,05	0,000	49,555	1,66	0,100	25,53	140	0,2578
	<b>(-20,-10)</b>	-1,880	-0,31	0,756	11,182	0,16	0,877	0,1	416	0,0005
	<b>(-10,-4)</b>	-3,647	-2,23	0,026	-2,413	-0,24	0,809	4,97	737	0,0086
	<b>(-4,0)</b>	-3,820	-3,22	0,001	2,518	1,15	0,252	10,4	649	0,0111
	<b>(0,4)</b>	-1,185	-1,41	0,160	7,476	3,02	0,003	1,98	591	0,0018
	<b>(4,10)</b>	-0,659	-1,01	0,313	9,500	1,97	0,050	1,02	626	0,0017
	<b>(10,20)</b>	0,451	1,3	0,194	-1,403	-0,3	0,766	1,69	497	0,0038
	<b>&gt;20</b>	-0,191	-2,24	0,026	8,894	2,71	0,008	5,02	167	0,0134
<b>&lt;30</b>	<b>&lt;-20</b>	0,237	6,84	0,000	-77,313	-23,48	0,000	46,81	138	0,1317
	<b>(-20,-10)</b>	5,021	7,34	0,000	18,679	1,78	0,075	53,84	543	0,0704
	<b>(-10,-4)</b>	2,803	1,92	0,055	10,277	1,06	0,289	3,69	627	0,0058
	<b>(-4,0)</b>	0,762	0,48	0,629	8,706	2,64	0,009	0,23	467	0,0004
	<b>(0,4)</b>	-2,857	-2,3	0,022	11,951	3,56	0,000	5,27	404	0,0127
	<b>(4,10)</b>	-0,087	-0,27	0,789	1,137	0,46	0,646	0,07	482	0,0001
	<b>(10,20)</b>	0,013	0,07	0,941	1,251	0,47	0,637	0,01	385	0,0000
	<b>&gt;20</b>	-0,053	-0,66	0,508	2,266	0,9	0,371	0,44	126	0,0024

## 5. Conclusões

Este estudo procurou seguir duas linhas de análise acerca do mercado de opções de compra da Bolsa de Valores de São Paulo. Por um lado, procurou-se documentar detalhadamente as opções negociadas naquele mercado, objetivando estabelecer um perfil sucinto dos contratos mais negociados. Mostrou-se que uma proporção superior a 90% do volume de negociações é concentrada em somente três ações-objeto, e que uma fração equivalente do volume diário gira em torno de apenas cinco contratos. Após a privatização da Telebrás, as opções sobre a ação Telemar PN lograram um crescimento quase monotônico de participação, chegando a quase 92% do estoque financeiro das opções em aberto. Desta forma, as transações diárias também foram dominadas pelos contratos escritos sobre a ação. Entre os dez mais líquidos diariamente (mais de 92% do volume diário), oito em média são da Telemar. Recentemente, os contratos da Petrobrás PN, e do Ibovespa, principalmente, adquiriram volumes intermediários e consistentes de liquidez.

Com relação aos outros aspectos dos contratos, o estudo constatou que o mercado possui um perfil de curto prazo, sendo composto majoritariamente de opções com menos de 2 meses para o vencimento. Mostrou-se também que embora as opções americanas representem quase a totalidade dos contratos negociados, somente 10% da amostra é afetada pelos dividendos. Por fim, foi verificada a existência de assimetrias de liquidez favoráveis às opções dentro-do-dinheiro.

O segundo foco do estudo foi apresentar uma discussão atualizada acerca das volatilidades implícitas dos contratos, servindo como guia para o objetivo central de testar a eficiência do modelo de Black and Scholes no apreçamento de opções na amostra. Foram apresentadas evidências de que as premissas de normalidade e volatilidade constante dos retornos das ações, admitidas pelo modelo, nem sempre são adequadas às estruturas observadas no mercado, conduzindo a erros de apreçamento.

Assim sendo, verificou-se que a hipótese que o modelo de Black and Scholes apreça corretamente as opções só não pode ser rejeitada para os três contratos mais líquidos diariamente. Em seguida, avaliou-se também que não existem evidências que o pagamento de dividendos impliquem em maiores erros de apreçamento. As análises de volatilidades implícitas e de apreçamento também trouxeram evidências inequívocas que os prazos de vencimentos podem ser relacionados com algumas tendências de erro do modelo. Em

particular, opções com menos de um mês de maturidade possuem volatilidades implícitas significativamente maiores, levando a fórmula de Black and Scholes a subestimar os preços de mercado. Testes específicos para grupos de opções classificadas pelo *moneyness* revelaram que o modelo de Black and Scholes é adequado para apreçar as opções da Telemar e do Ibovespa dentro-do-dinheiro, excluindo os extremos. O mesmo não ocorre para opções fora-do-dinheiro. Para a Telemar, o modelo de Black and Scholes super avalia opções com maturidades mais longas e sub apreça contratos de curto prazo. Com relação aos contratos sobre o índice Bovespa, não existem evidências de vieses sistemáticos.

## REFERÊNCIAS:

- ARAÚJO, G.S. & FIGUEIREDO, A.C. *Contornando os pressupostos do modelo de Black and Scholes: aplicação do modelo de Duan no mercado brasileiro*. ENANPAD 2003.
- BENNINGA, S. *Financial Modeling*. 2ª Ed., MIT Press. 2001.
- BLACK, F. Fact and fantasy in the use of options. *Financial Analysts Journal*, 31, 36-41 e 61-72. 1975.
- BLACK, F. & SCHOLES, M. The valuation of options contracts and a test of market efficiency. *Journal of Finance*, 27, 399-418. 1972.
- \_\_\_\_\_. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-69. 1973.
- CHIRAS, D. & MANASTER, S. The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency. *Journal of Financial Economics*, 6, 213-34. 1978.
- CONOVER, W.J. *Practical Nonparametric Statistics*. Wiley, Nova York, 1971.
- COX, J.C. & S.A. ROSS. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3, 145-66. 1976.
- DUAN, J. The GARCH option pricing model. *Mathematical Finance*, 5, 13-32. 1995
- DUMAS, B., FLEMING, J., & WHALEY, R. Implied Volatility Functions: Empirical Tests. *Journal of Finance*, 53, 2059-2106, 1998.
- D'AGOSTINO, R., BALANGER, A., & D'AGOSTINO JR., R. A suggestion for Using Powerful and Informative Tests of Normality. *American Statistician*, 44, 316-21, 1990.
- GALAI, D. Tests of Market Efficiency and the Chicago Board Options Exchange. *Journal of Business*, 50, 167-97. 1977.
- HULL, J. *Options, futures and other derivatives securities*. 4ª Ed., Prentice Hall. 2000.
- HULL, J. & WHITE, A. The pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 42, 281-300. 1987.
- MCBETH, J.D. & MERVILLE, L.J. An empirical examination of the Black-Scholes call option pricing model. *Journal of Finance*, 34, 1173-86. 1979.

RUBINSTEIN, M. Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978. *Journal of Finance*, 40, 455-480. 1985.

\_\_\_\_\_ Implied Binomial Trees. *Journal of Finance*, 49, 771-818. 1994.

VARGA, G. Interpolação por Cubic Spline para a Estrutura a Termo Brasileira. *Resenha da BM&F*, 40. Maio 2000.