

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

VOLATILIDADE REALIZADA: PREVISÃO E APLICAÇÕES A MEDIDAS DE
VALUE-AT-RISK

Guilherme Fernandes Sanches
Matrícula: 0320539

Orientador: Marcelo Cunha Medeiros

Junho de 2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

VOLATILIDADE REALIZADA: PREVISÃO E APLICAÇÕES A MEDIDAS DE
VALUE-AT-RISK

“Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorro para realizá-lo a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor tutor”.

Guilherme Fernandes Sanches

Matrícula: 0320539

Orientador: Marcelo Cunha Medeiros

Junho de 2008

"As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor"

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha família, em especial à minha mãe Denise, pela dedicação e pela ajuda na superação dos obstáculos do dia-a-dia. Agradeço, também, aos meus avós Álvaro, Lourdes e Rad pelo grande incentivo dado à conclusão da minha graduação em Ciências Econômicas e Matemática Aplicada, na PUC-Rio, e pelos ensinamentos de vida.

Agradeço aos professores: Cristiano Fernandes e Adrian Pizzinga, cujas contribuições para a minha formação como econometrista são inestimáveis; Marcelo Medeiros, pela competente orientação neste trabalho; Walter Novaes, Márcio Garcia, Nicolau Saldanha e Marcos Craizer, pelos excelentes cursos ministrados nos Departamentos de Economia e Matemática da PUC-Rio.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	6
2. VOLATILIDADE REALIZADA	9
2.1 Definições.....	9
2.2 Amostragem	10
3. EVIDÊNCIAS EMPÍRICAS E FATOS ESTILIZADOS	11
3.1 Revisão da Literatura.....	11
3.2 Estatísticas Descritivas	12
4. ESTIMAÇÃO DA VOLATILIDADE E DO VALUE-AT-RISK COM DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA	16
4.1 Value-at-Risk	16
4.2 Modelo de Volatilidade Realizada: HAR	16
4.3 Modelo de Volatilidade Latente: GARCH.....	18
5. COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE VOLATILIDADE	20
5.1 Previsão da Volatilidade	20
5.2 Previsão do Value-at-Risk	22
6. CONCLUSÕES	24
7. APÊNDICE: ALGORITMOS COMPUTACIONAIS	25
7.1 HAR	25
7.2 GARCH	28
8. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.....	29

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Estatísticas Descritivas do índice S&P 500

Tabela 2: Estatísticas Descritivas do índice FTSE

Tabela 3: Momentos dos retornos padronizados do índice S&P 500

Tabela 4: Momentos dos retornos padronizados do índice FTSE

Tabela 5: Root Mean Squared Error: HAR x GARCH

Tabela 6: Percentual de retornos abaixo do VaR: HAR x GARCH

1. Introdução

Os modelos de previsão de volatilidade são de vital importância para diversas áreas de pesquisa em finanças empíricas, como otimização de portfólio, gestão de risco de mercado e precificação de derivativos.

O primeiro modelo de previsão de variância condicional no tempo nasceu de uma pesquisa de Robert Engle, em 1982, no artigo “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation.” O modelo proposto por Engle ficou conhecido como ARCH, e propiciava uma previsão um passo à frente da variância da série como função do tempo. Na prática, o modelo ARCH capturava aglomerados de volatilidade que outros processos estocásticos não capturavam. Como propõe o título do artigo, foi utilizada uma série de inflação do Reino Unido para a estimação do modelo. Logo os econometristas da época perceberam que o ARCH também se aplicava a séries de retorno financeiro, já que estas também apresentavam aglomerados de volatilidade.

O artigo de Bollerslev (1986) aprimora o modelo proposto por Engle (1982) e propõe um processo estocástico chamado GARCH - *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, que também captura os aglomerados de volatilidade percebidos por Engle (1982), e cuja previsão é mais acurada se comparada ao ARCH. A partir daí, foram propostas variantes do GARCH com distribuição condicional assimétrica e de caudas pesadas, uma vez que estes fatos estilizados não eram levados em conta pelo GARCH proposto por Bollerslev (1986). Também foram propostos, para dados diários, modelos de volatilidade estocástica, conhecidos como SV (do inglês *stochastic volatility*). Há bons exemplos de modelos SV nos trabalhos de Taylor (1986) e de Barndorff-Nielsen e Shephard (2001). A estimação de modelos SV não é trivial, como sugere o trabalho de Alizadeh et al. (2002).

Todos os processos estocásticos descritos aqui – SV, ARCH, GARCH e variantes – tratam a volatilidade da série como uma característica não-observável dela. De fato, de posse dos retornos diários, não é possível auferir diretamente as volatilidades diárias. É necessário estimar os parâmetros da equação da variância condicional e, assim, obter uma previsão da volatilidade.

Através da obtenção de dados de alta frequência – isto é, dados intradiários dos preços de ativos financeiros – foi possível elaborar modelos de previsão que tratam a volatilidade como uma variável observável. Chamamos de volatilidade realizada a raiz quadrada do somatório dos quadrados dos retornos intradiários de um determinado dia.

Os modelos de volatilidade realizada permitem a incorporação de um importante fato estilizado das séries financeiras que os modelos de volatilidade latente não permitem. Existe uma baixa, porém de lento decrescimento, autocorrelação nos quadrados dos retornos que são associados com o excesso de curtose dos retornos – como relatam McAleer e Medeiros (2008).

O trabalho de Andersen et al. (2003) elabora um método multivariado para a previsão da volatilidade realizada. Este modelo permite a estimação da matriz de covariâncias de maneira direta, já que as variâncias e covariâncias são observáveis. Ele deve levar a um resultado computacionalmente mais eficiente se comparado ao modelo proposto por Engle (2002a), que trata as covariâncias e variâncias como componentes não-observáveis. Os modelos multivariados são muito importantes para a prática de mercado em *risk management* e *asset allocation*, já que as carteiras reais apresentam muitos ativos diferentes. No entanto, a construção das covariâncias realizadas não é trivial; ela necessita de estimadores sofisticados e de uma base de dados extremamente específica.

O presente trabalho tratará de modelos de previsão univariados para volatilidade realizada e para volatilidade latente. Realizaremos a comparação entre dois modelos: HAR - *Heterogeneous Autoregressive* - para volatilidade realizada e GARCH para volatilidade latente.

O modelo HAR será estimado pelo método denominado Mínimos Quadrados Ordinários. Já o modelo GARCH será estimado pelo método de Máxima Verossimilhança. Ambas as estimações serão implementadas por algoritmos computacionais através do software MATLAB.

A comparação entre os modelos se dará através da comparação entre os erros quadráticos médios das previsões. Quanto menor o erro quadrático médio, mais acurada é a previsão estatística.

De posse das volatilidades previstas, construiremos medidas de VaR para carteiras com um ativo. Existe evidência empírica de que a distribuição dos retornos padronizados pela volatilidade realizada prevista um passo à frente tem caudas pesadas.

Segundo Giot e Laurent (2004), modelos de volatilidade realizada e latente não apresentam significativa diferença estatística na previsão de *Value-at-Risk* para horizontes de 1 dia de uma carteira com apenas um ativo. O presente trabalho pode servir como uma extensão ou negação desse resultado, dependendo da análise de VaR advinda das previsões de volatilidade.

2. Volatilidade Realizada

2.1 Definições

Supondo que o logaritmo do preço de um determinado ativo siga um processo estocástico de difusão em tempo contínuo, temos:

$$dp(t + \tau) = \mu(t + \tau)d\tau + \sigma(t + \tau)dW(t + \tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, t = 1, 2, \dots,$$

onde:

$p(t + \tau)$ = logaritmo do preço no tempo $(t + \tau)$

$\mu(t + \tau)$ = componente de drift

$\sigma(t + \tau)$ = volatilidade instantânea

$W(t + \tau)$ = movimento browniano padrão

Suponha $\sigma(t + \tau)$ ortogonal a $W(t + \tau)$. Dessa forma, não há *leverage effect*.

Segundo McAleer e Medeiros (2008), os retornos diários, definidos como $r_t = p(t) - p(t-1)$, têm distribuição condicional Normal em $\mathfrak{F}_t \equiv \mathfrak{F}\{\mu(t + \tau - 1), \sigma(t + \tau - 1)\}_{\tau=0}^{\tau=1}$ onde \mathfrak{F}_t é a σ -álgebra gerada pelas *sample paths* de $\mu(t + \tau - 1)$ e $\sigma(t + \tau - 1)$, $0 \leq \tau \leq 1$, tal que:

$$r_t \Big| \mathfrak{F}_t \sim N\left(\int_0^1 \mu(t + \tau - 1)d\tau, \int_0^1 \sigma^2(t + \tau - 1)d\tau\right)$$

Definimos $IV_t = \int_0^1 \sigma^2(t + \tau - 1)d\tau$ como *integrated variance*, que é uma medida da variância ex-post no dia t . A *integrated variance* representa uma medida da verdadeira variância diária.

2.2 Amostragem

Ainda de acordo com McAleer e Medeiros (2008), existem quatro principais métodos de amostragem para a volatilidade realizada. São eles:

(i) *Calendar Time Sampling* (CTS): intervalos de tempo são equidistantes. Os preços podem ser amostrados de 5 em 5 minutos, ou de 15 em 15 minutos, por exemplo. Como os dados intradiários são espaçados de maneira irregular, a amostragem por CTS é construída, na maioria dos casos, de forma artificial.

(ii) *Transaction Time Sampling* (TrTS): Preços são amostrados a cada m -ésimo negócio.

(iii) *Business Time Sampling* (BTS): Os intervalos de tempo da amostragem são escolhidos de forma que $IV_{i,t} = \frac{IV_t}{n_t}$, onde n_t é o número total disponível de retornos intradiários e $IV_{i,t}$ é a *integrated variance* com limite de integração inferior igual a τ_{i-1} e superior igual a τ_i ; τ_i representa o tempo de observação do i -ésimo preço intradiário.

(iv) *Tick Time Sampling* (TkTS): Preços são amostrados a cada negócio.

Neste trabalho, a *integrated variance* foi estimada de acordo com um método do tipo *Tick Time Sampling* proposto no artigo de Barndorff-Nielsen et al. (2008). O artigo propõe um estimador consistente para a *integrated variance*, através da construção da variância realizada com a utilização de dados de preço a cada negócio.

3. Evidências Empíricas e Fatos Estilizados

3.1 Revisão da Literatura

Segundo Engle (2004), a hipótese de normalidade para a distribuição condicional dos retornos, que é feita na estimação de vários modelos do tipo ARCH, GARCH ou de volatilidade estocástica, não se confirma para as séries reais. Para os dados de retorno do índice S&P 500 utilizados por Engle, verifica-se um coeficiente de curtose igual a 6.5 para a distribuição dos retornos padronizados pela volatilidade prevista. O modelo utilizado para a previsão da volatilidade foi o TARARCH, proposto por Zakoian (1994), e que se diferencia do ARCH por supor uma distribuição condicional assimétrica. O coeficiente de curtose estimado igual a 6.5 é uma evidência empírica de que as caudas da distribuição condicional dos retornos são mais pesadas do que uma distribuição Normal suporia.

Giot e Laurent (2004) mostram que, para dados de retorno dos índices CAC40 e S&P 500 e das taxas de câmbio de YEN por Dólar e de DEM por Dólar, não há evidência empírica de normalidade para a distribuição condicional dos retornos quando a previsão é feita por modelos de volatilidade realizada. Portanto, para previsões de perda como o *Value-at-Risk*, as medidas de volatilidade realizada precisam ser combinadas com distribuições de probabilidade adequadas, com caudas mais pesadas que a Gaussiana e com função de densidade assimétrica em relação à média.

Um fato estilizado interessante da literatura de volatilidade realizada é que a distribuição dos retornos padronizados pela volatilidade realizada ex-post tem distribuição muito próxima da Normal. No entanto, em um contexto de modelos de previsão, tal fato estilizado raramente tem implicações interessantes, uma vez que a volatilidade realizada ex-post no dia t não é conhecida no momento em que fazemos a previsão, isto é, no dia $(t-1)$.

Outro fato estilizado desta literatura é o fato da distribuição do logaritmo da variância realizada apresentar uma distribuição muito próxima da Normal. Tal fato corrobora para a utilização de distúrbios aleatórios gaussianos em modelos do tipo ARFIMA - *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* - e HAR - *Heterogeneous Autoregressive*.

Segundo Scharth e Medeiros (2006), Fernandes, Medeiros e Scharth (2007), Bandi e Perron (2006), Poon e Granger (2003) e ABDL (2003), existe evidência empírica de memória longa nas séries de tempo do logaritmo da variância realizada. Por essa razão, os modelos ARFIMA, HAR e variantes têm sido usados com frequência em sua modelagem.

3.2 Estatísticas Descritivas

Na tabela a seguir, pode-se observar os 4 primeiros momentos das séries de retorno, da variância realizada e do logaritmo natural da variância realizada do índice americano S&P 500. Os momentos foram calculados utilizando-se três subamostras distintas. A primeira vai de 2 de janeiro de 1996 até 31 de dezembro de 2001 e contém 1484 observações. A segunda, de 2 de janeiro de 2002 a 29 de março de 2007, contendo 1312 observações. A terceira subamostra engloba as duas anteriores: começa em 2 de janeiro de 1996 e termina em 29 de março de 2007, possuindo 2796 observações.

Estatística	Retorno	RV	log(RV)
(1996-2001)			
Média	0.023	1.050	-0.316
Variância	1.398	1.331	0.711
Assimetria	-0.308	4.348	0.032
Curtose	6.130	32.070	3.264
(2002-2007)			
Média	0.013	0.766	-0.740
Variância	0.997	1.219	0.793
Assimetria	0.163	5.374	0.622
Curtose	6.394	46.345	3.375
(1996-2007)			
Média	0.018	0.917	-0.515
Variância	1.209	1.298	0.794
Assimetria	-0.144	4.704	0.267
Curtose	6.377	37.043	3.010

Tabela 1 - Estatísticas Descritivas do índice S&P 500

Foram estimados os mesmos momentos para dados do índice FTSE, do mercado inglês. A primeira subamostra vai de 2 de janeiro de 1996 a 31 de dezembro de 2001 e contém 1493 observações. A segunda subamostra vai de 2 de janeiro de 2002 a 28 de dezembro de 2007 e contém 1508 observações. A terceira subamostra começa em 2 de janeiro de 1996 e termina em 28 de dezembro de 2007, contendo 3001 observações.

Estadística	Retorno	RV	log(RV)
(1996-2001)			
Média	-0.008	1.395	-0.202
Variância	1.222	6.577	1.027
Assimetria	-0.186	11.969	-0.090
Curtose	4.453	229.669	3.518
(2002-2007)			
Média	0.004	1.040	-0.573
Variância	1.092	3.750	1.021
Assimetria	-0.266	10.184	0.598
Curtose	7.484	182.899	3.259
(1996-2007)			
Média	-0.002	1.217	-0.389
Variância	1.157	5.186	1.058
Assimetria	-0.224	11.708	0.243
Curtose	5.824	233.381	3.126

Tabela 2 - Estatísticas Descritivas do índice FTSE

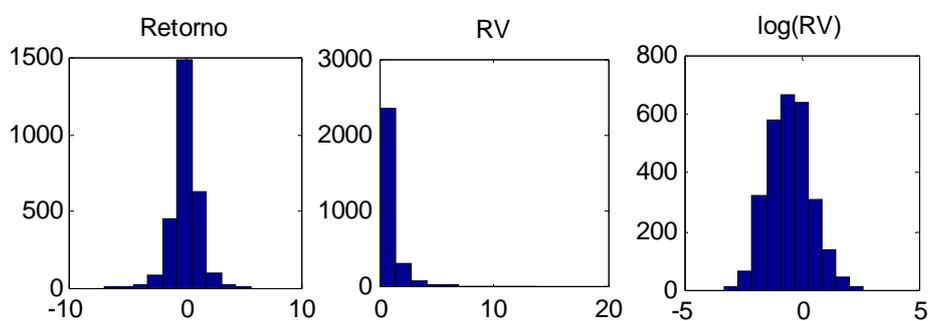
As séries do logaritmo da variância realizada apresentam coeficiente de assimetria próximo de zero e coeficiente de curtose próximo de 3, o que corrobora para a hipótese de normalidade presente na literatura, como é relatado na seção 3.1.

As séries de retorno apresentam coeficiente de curtose maior do que 3, chegando a 7.48 na segunda subamostra do índice FTSE. Com efeito, o fato estilizado mais conhecido no ramo da econometria financeira é a presença de caudas pesadas nas distribuições incondicionais dos retornos.

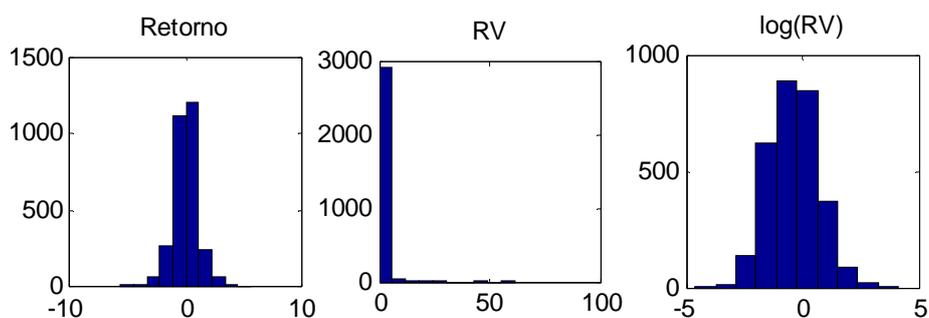
A seguir, podemos ver histogramas que parecem confirmar a não-normalidade da série de retornos e a aparente normalidade da série do logaritmo da variância realizada.

Para a construção dos histogramas, foram utilizadas as 2796 observações do índice S&P 500 e as 3001 observações do índice FTSE.

S&P 500



FTSE

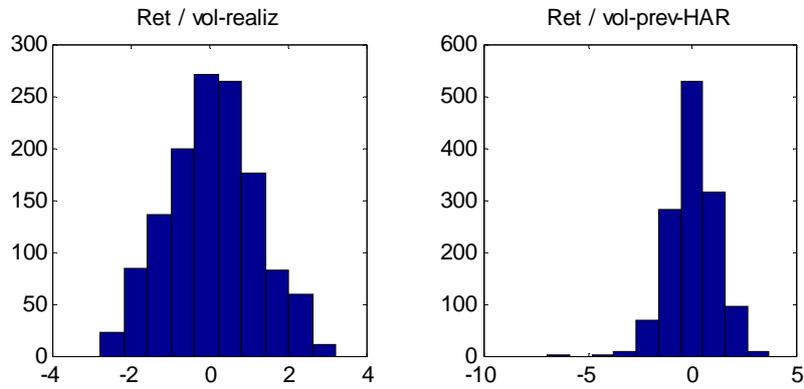


Foram estimados os 4 primeiros momentos da série de retornos padronizados pela volatilidade realizada e pela volatilidade prevista pelo modelo HAR. A distribuição dos retornos padronizados pela volatilidade realizada parece ser bem próxima da Normal. O mesmo não ocorre quando os retornos são padronizados pela volatilidade prevista pelo modelo HAR.

Estatística (2002-2007)	Ret / vol_realiz	Ret / vol_prev (HAR)
Média	0.0662	0.012
Variância	1.2593	1.2008
Assimetria	0.0554	-0.3131
Curtose	2.6042	4.3258

Tabela 3 – Momentos dos retornos padronizados – S&P 500

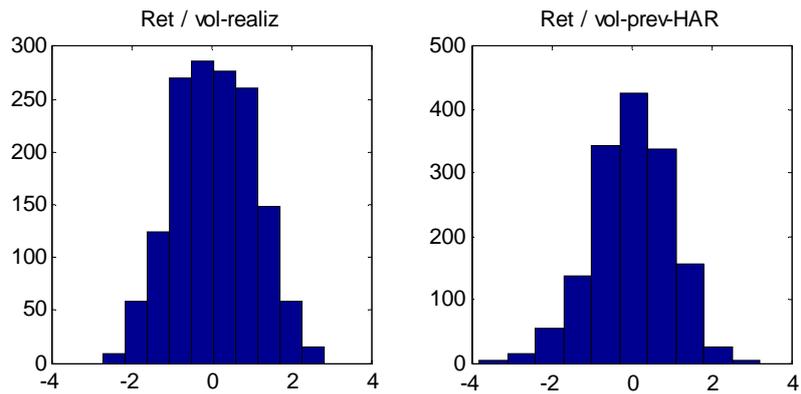
S&P 500



Estadística	Ret / vol_realiz	Ret / vol_prev
(2002-2007)		(HAR)
Média	0.079	0.009
Variância	0.997	0.969
Assimetria	0.041	-0.301
Curtose	2.522	3.259

Tabela 4 – Momentos dos retornos padronizados – FTSE

FTSE



4. Estimação da Volatilidade e do Value-at-Risk com Distribuição Gaussiana

4.1 Value-at-Risk

O *Value-at-Risk* com nível de significância α e horizonte de previsão k é a perda máxima esperada de uma carteira para k períodos à frente, com $(1 - \alpha)\%$ de confiança. Neste trabalho, focaremos na previsão de VaR para 1 dia à frente; isto é, assumiremos $k = 1$.

De acordo com a metodologia *riskmetrics*, temos:

$$\frac{R_t}{\hat{\sigma}_t} \sim N(0,1) \quad , \text{ onde:}$$

R_t = retorno no dia t

$\hat{\sigma}_t$ = previsão da volatilidade para t dado $(t-1)$

$$\Pr(R_t < -\hat{\sigma}_t Z^\alpha) = \alpha \quad , \text{ onde } Z^\alpha \text{ é o quantil de } \alpha \% \text{ da Normal-padrão.}$$

$$VaR_{1\text{dia}}^{\alpha\%} = -\hat{\sigma}_t Z^\alpha$$

4.2 Modelo de Volatilidade Realizada: HAR

O modelo HAR – *Heterogeneous Autoregressive* – foi proposto por Corsi (2004).

$$\log(RV_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(RV_{t-1}) + \beta_2 \log(RV_{t-1,w}) + \beta_3 \log(RV_{t-1,m}) + \varepsilon_t,$$

onde:

$$\varepsilon_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$$

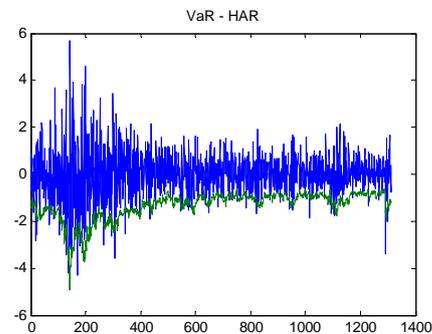
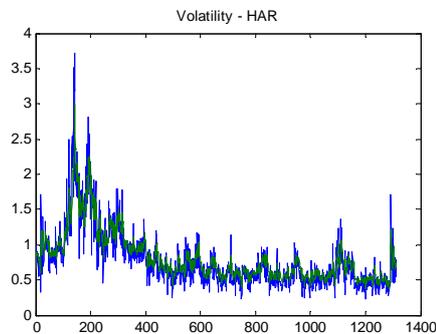
$$RV_{t-1,w} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 RV_{t-j}$$

$$RV_{t-1,m} = \frac{1}{22} \sum_{j=1}^{22} RV_{t-j}$$

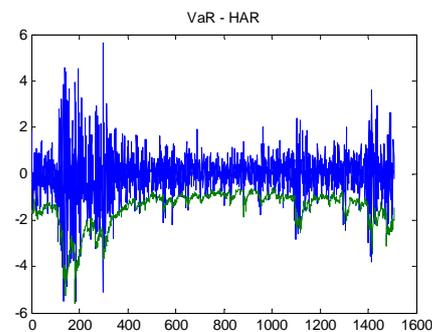
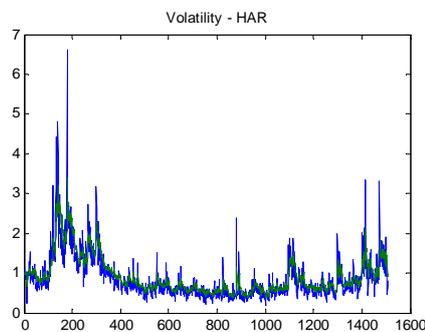
A estimação do HAR foi feita pelo método de Mínimos Quadrados Ordinários. A primeira previsão é feita para o dia (N1+1), onde N1 é o índice da série que representa o último dia de negócios do ano de 2001. A seguir, pode-se observar uma comparação entre a volatilidade realizada – em azul – e a previsão da volatilidade realizada – em verde – para as séries dos índices S&P 500 e FTSE.

De posse das previsões de volatilidade, estimamos o *Value-at-Risk* com horizonte de 1 dia e nível de significância de 1%. Foi utilizada a hipótese de normalidade para a distribuição condicional dos retornos.

S&P 500



FTSE



No caso do índice S&P 500, houve 23 dias da amostra entre 2002 e 2007 em que o retorno observado foi menor do que o VaR previsto. Como o número de observações entre 2002 e 2007 é igual a 1312, concluímos que o retorno observado foi menor do que o VaR em 1.75% dos dias. Dado o nível de significância de 1%, esperávamos que a perda ultrapassasse a medida de VaR em 1% dos casos, em média. No caso do índice FTSE, o número de dias em que a perda foi maior do que a prevista foi 24, de um total de 1508 observações. Portanto, em 1.59% dos casos a perda efetiva superou o VaR previsto.

Ao estimar o VaR de 1 dia com nível de significância de 5%, observamos que, no caso do S&P 500, em 80 dias a perda efetiva superou a prevista; isto é, em 6.10% dos casos o retorno foi menor do que o VaR. No caso do FTSE, foram 84 dias em que isso ocorreu, totalizando 5.57% dos casos.

4.3 Modelo de Volatilidade Latente: GARCH

O processo estocástico GARCH(p,q) foi proposto por Bollerslev (1986).

$$R_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d. N(0,1)$$

$$h_t = \alpha + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} + \sum_{j=1}^q \gamma_j R_{t-j}^2$$

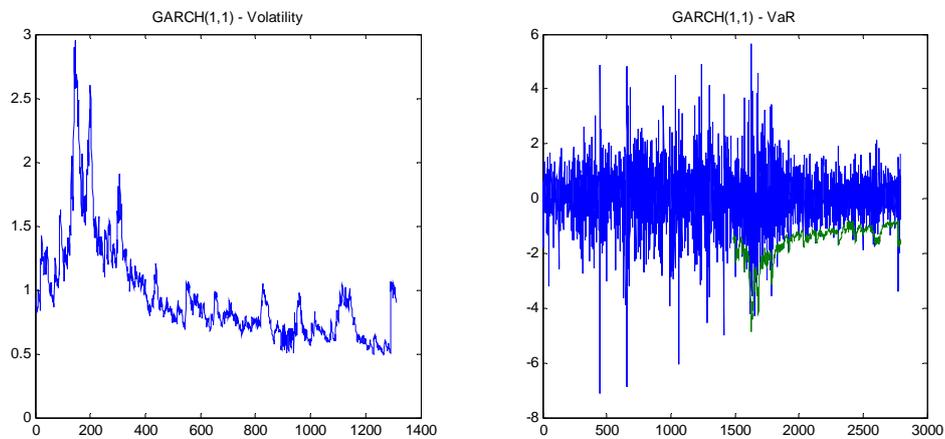
Considere $p = q = 1$. Então, temos:

$$R_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d. N(0,1)$$

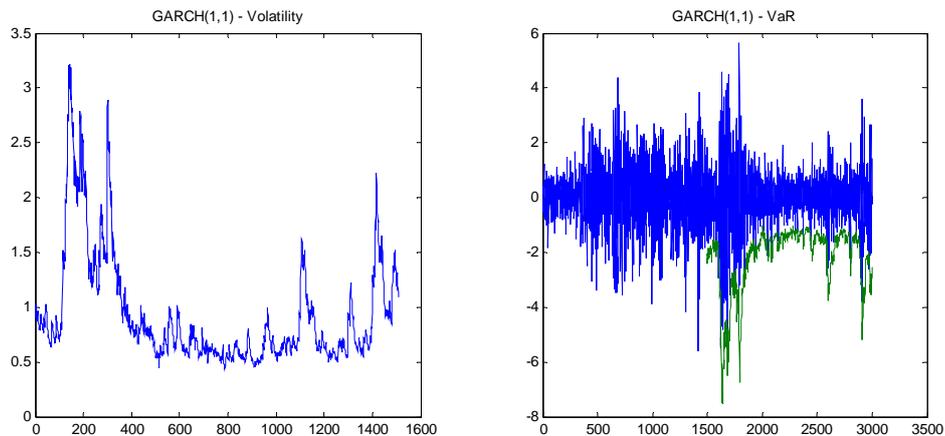
$$h_t = \alpha + \beta h_{t-1} + \gamma R_{t-1}^2$$

A seguir, pode-se observar o gráfico da volatilidade dos retornos prevista pelo GARCH(1,1) e o gráfico do VaR de 1 dia com nível de significância de 1% que utiliza esta previsão.

S&P 500



FTSE



Para o índice S&P 500, observamos que a perda efetiva superou a esperada em 11 dias, isto é, em 0.84% dos casos, para um nível de significância de 1%. Para um nível de significância de 5%, tal fenômeno ocorreu em 57 dias, ou seja, em 4.34% dos casos.

Para o índice FTSE, observamos que o retorno foi menor do que o VaR em 23 casos de um total de 1508. Isto é, em 1.53% dos dias a perda efetiva superou a prevista, para um nível de significância de 1%. Utilizando um nível de significância de 5%, o número total de dias em que o retorno foi menor do que o VaR foi igual a 84, ou seja, 5.57% dos casos.

5. Comparação entre os Modelos de Volatilidade

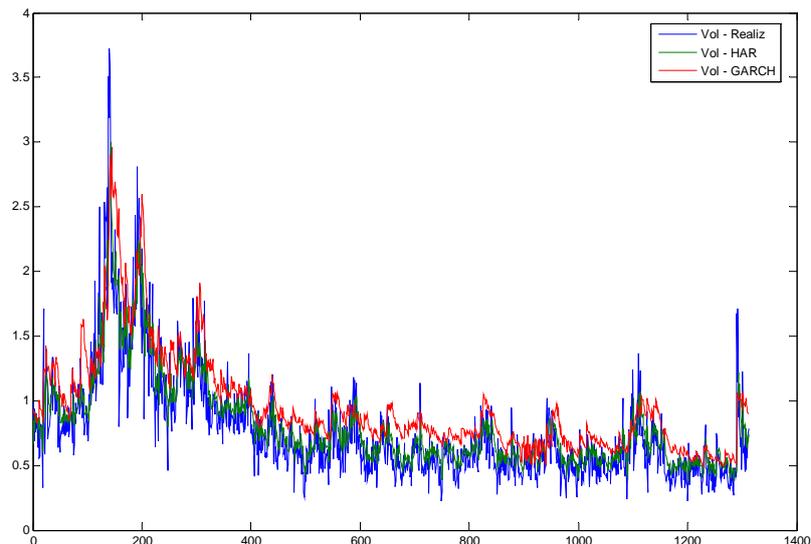
5.1 Previsão da Volatilidade

	S&P 500	FTSE
HAR	0.205	0.294
GARCH	0.299	0.333

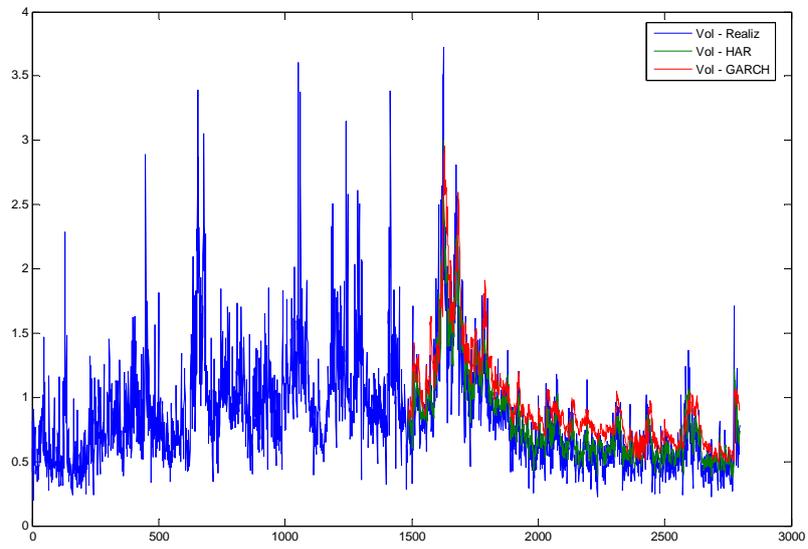
Tabela 5 – Root Mean Squared Error

Os resultados relativos à comparação entre os modelos de volatilidade feita pelo cálculo da raiz quadrada do erro médio quadrático estão em consonância com a literatura. Tanto para os dados do S&P 500 como para os dados do FTSE, o modelo HAR, que utiliza dados de alta frequência para a previsão da volatilidade, apresenta previsão estatística mais acurada se comparado ao GARCH, modelo de volatilidade latente que utiliza dados de retorno diário.

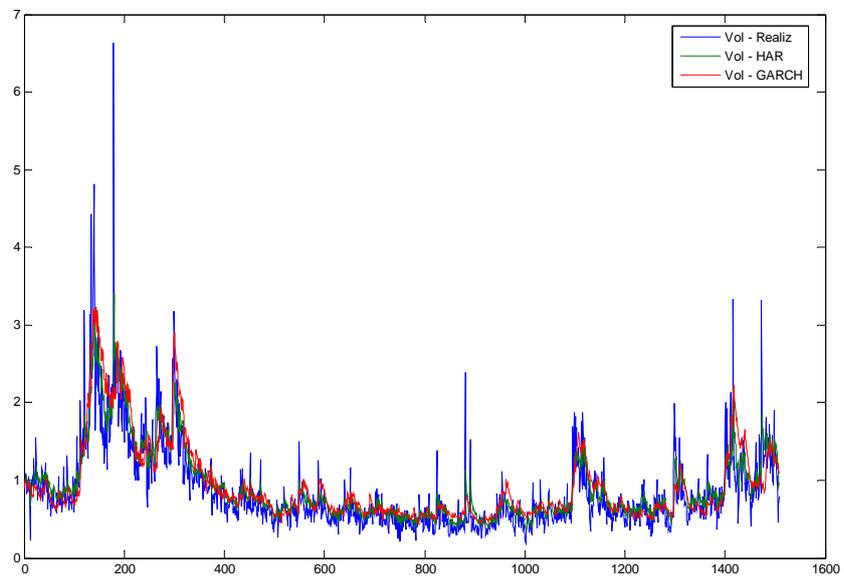
S&P 500



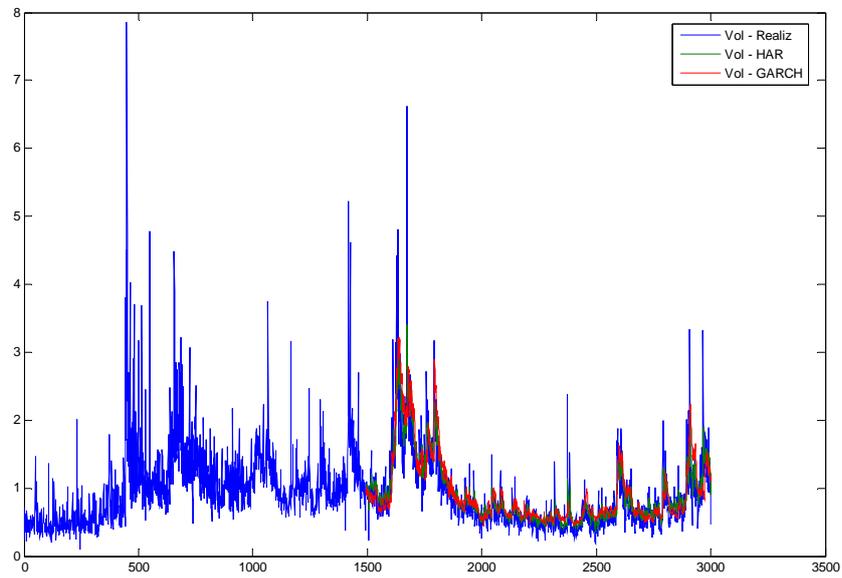
S&P 500



FTSE

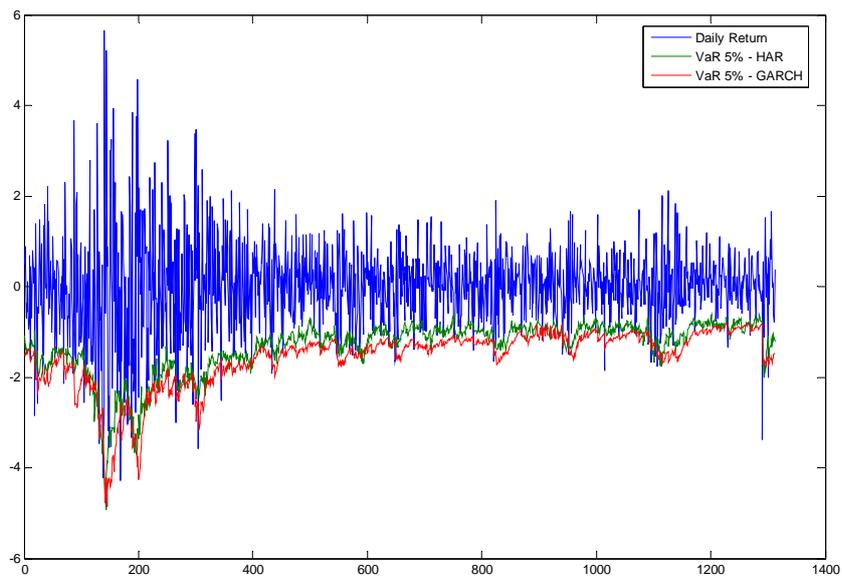


FTSE

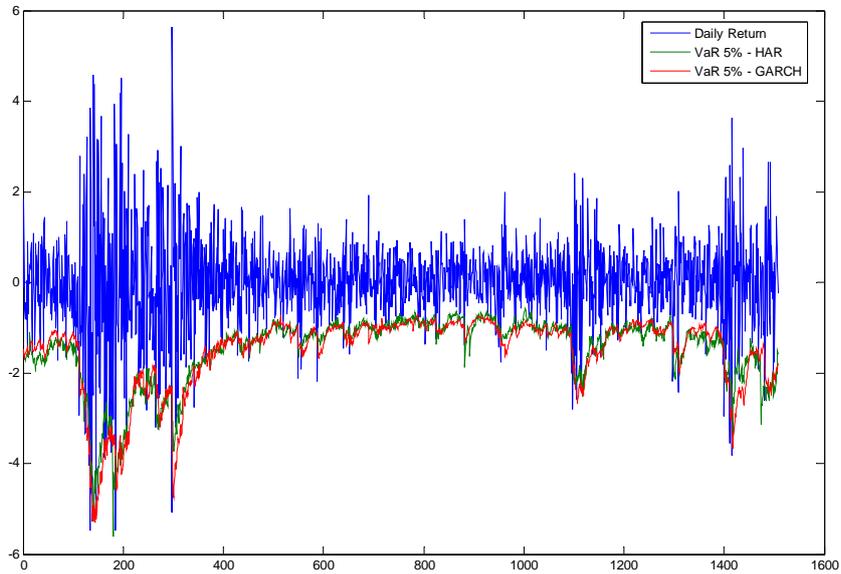


5.2 Previsão do Value-at-Risk

S&P 500



FTSE



VaR	1%	5%
(S&P 500)		
HAR	1.75%	6.10%
GARCH	0.84%	4.34%
(FTSE)		
HAR	1.59%	5.57%
GARCH	1.53%	5.57%

Tabela 6 – Percentual de retornos abaixo do VaR

A tabela acima mostra a fração de dias em que a perda efetiva superou o VaR para os índices S&P 500 e FTSE, utilizando os modelos de volatilidade HAR e GARCH(1,1).

As previsões de volatilidade do GARCH(1,1) ficaram, sistematicamente, acima da volatilidade realizada. No caso do índice S&P 500, essa diferença é bastante grande. Por essa razão, as estimativas de VaR provenientes do GARCH(1,1) ficaram maiores, o que permitiu a esse modelo capturar um maior número de eventos adversos.

6. Conclusões

De acordo com os trabalhos de Scharth e Medeiros (2006) e de ABDL (2003), os modelos de volatilidade realizada geram uma previsão estatística mais acurada quando comparados aos modelos de volatilidade latente, particularmente aos da família GARCH. No presente trabalho, encontramos evidências empíricas que corroboram para esse fato. Ao compararmos os modelos HAR - proposto por Corsi (2004) - e GARCH - proposto por Bollerslev (1986), notamos que o erro médio quadrático advindo das previsões do HAR é menor do que o erro médio quadrático advindo das previsões do GARCH.

No entanto, ao compararmos as medidas de VaR provenientes das estimativas de volatilidade, notamos que, para os dados do índice S&P 500, parece haver diferença estatística significativa a favor do GARCH. Ao observarmos o gráfico da previsão do GARCH comparada à volatilidade realizada – seção 5.1 – notamos que as estimativas provenientes do GARCH parecem ficar, sistematicamente, acima da volatilidade realizada, que representa uma medida da verdadeira volatilidade do dia. Dessa forma, o GARCH foi capaz de capturar um maior número de eventos extremos na previsão do VaR.

Segundo Giot e Laurent (2004), a abordagem *riskmetrics*, que pressupõe normalidade para a distribuição dos retornos padronizados pela volatilidade prevista, não é adequada. Portanto, para gerar previsões de VaR mais precisas com o modelo HAR, deveríamos supor uma distribuição condicional dos retornos com caudas mais pesadas do que a Normal e com função de densidade assimétrica em relação à média.

Além disso, o presente trabalho não faz qualquer menção ao tratamento das *jump diffusions*. Seu correto tratamento – através da utilização de dados de anúncios macroeconômicos, por exemplo – pode corroborar para o aprimoramento das medidas de volatilidade e de VaR provenientes dos modelos HAR e GARCH.

7. Apêndice: Algoritmos Computacionais

7.1 HAR

A seguir, estão disponibilizados os principais algoritmos computacionais programados no MATLAB para a estimação do modelo HAR por Mínimos Quadrados Ordinários e do VaR paramétrico que usa essa estimativa.

```
% Heterogeneous Autoregressive           INÍCIO  
HAR.RV_prev = NaN(N,1);                   % Previsão da variância realizada  
HAR.logRV_prev = NaN(N,1);                % Previsão do log da variância realizada  
HAR.vol_prev = NaN(N,1);                  % Previsão da volatilidade realizada  
HAR.r_std_prev = NaN(N,1);                % Retorno padronizado pela vol_prev  
p = 22;                                    % p primeiras observações  
for k=1:N2                                  % Índice dinâmico da amostra  
    M = (N1-p) + (k-1);                    % tamanho da amostra utilizada na estimação  
    if k==1  
        i=1;  
    end  
    % Construção do regressando y e dos regressores x1, x2 e x3   INÍCIO  
    while i<=M  
        HAR.MQO.y(i,1) = dados.RV(i+p,1);  
        HAR.MQO.logy(i,1) = log(dados.RV(i+p,1));  
        HAR.MQO.x1(i,1) = log(dados.RV(i+p-1,1));  
        media_movel = 0.0;  
        for j=1:5  
            media_movel = media_movel + dados.RV(i+p-j,1);  
        end  
        media_movel = media_movel/5;  
        HAR.MQO.x2(i,1) = log(media_movel);  
        media_movel = 0.0;
```

```

for j=1:22
    media_movel = media_movel + dados.RV(i+p-j,1);
end
media_movel = media_movel/22;
HAR.MQO.x3(i,1) = log(media_movel);
i=i+1;
end
% Construção do regressando y e dos regressores x1, x2 e x3 FIM

```

```

% Estimação por MQO INÍCIO
HAR.MQO.X = [ones(size(HAR.MQO.x1)) HAR.MQO.x1 HAR.MQO.x2
HAR.MQO.x3];
[HAR.MQO.b,HAR.MQO.bint,HAR.MQO.r,HAR.MQO.rint,HAR.MQO.stats] =
regress(HAR.MQO.logy,HAR.MQO.X);
% Estimação por MQO FIM

```

```

% Regressores utilizados na previsão um passo à frente INÍCIO
HAR.MQO.x1_prev = log(dados.RV(N1+k-1,1));
media_movel = 0.0;
for j=1:5
    media_movel = media_movel + dados.RV(N1+k-j,1);
end
media_movel = media_movel/5;
HAR.MQO.x2_prev = log(media_movel);
media_movel = 0.0;
for j=1:22
    media_movel = media_movel + dados.RV(N1+k-j,1);
end
media_movel = media_movel/22;
HAR.MQO.x3_prev = log(media_movel);
% Regressores utilizados na previsão um passo à frente FIM

```

```

% Construção da Previsão um passo à frente           INÍCIO
HAR.logRV_prev(N1+k,1) = HAR.MQO.b*[1 HAR.MQO.x1_prev
HAR.MQO.x2_prev HAR.MQO.x3_prev]';
for j=1:M
    HAR.MQO.logy_prev(j,1) = HAR.MQO.b*[1 HAR.MQO.x1(j,1)
    HAR.MQO.x2(j,1) HAR.MQO.x3(j,1)]';
    HAR.MQO.m(j,1) = exp(HAR.MQO.logy_prev(j,1));
end
HAR.alfa0 = regress(HAR.MQO.y,HAR.MQO.m);
HAR.RV_prev(N1+k,1) = HAR.alfa0*exp(HAR.logRV_prev(N1+k,1));
HAR.vol_prev(N1+k,1) = sqrt(HAR.RV_prev(N1+k,1));
HAR.r_std_prev(N1+k,1) = dados.r(N1+k,1)/HAR.vol_prev(N1+k,1);
% Construção da Previsão um passo à frente           FIM

end
clear media_movel i j k M;

% Heterogeneous Autoregressive           FIM

% Construção do VaR Normal de 1 dia com HAR           INÍCIO
HAR.VaR.perda_prev = NaN(N,1);
HAR.VaR.SDFM = 1.645;           % alfa=5%
HAR.VaR.contador = 0;
for i=N1+1:N
    HAR.VaR.perda_prev(i,1) = (-1)*HAR.VaR.SDFM*HAR.vol_prev(i,1);
    if (dados.r(i,1)<HAR.VaR.perda_prev(i,1))
        HAR.VaR.contador = HAR.VaR.contador + 1;
    end
end
HAR.VaR.porcent = HAR.VaR.contador/N2;
% Construção do VaR Normal de 1 dia com HAR           FIM

```

7.2 GARCH

% Estimação da vol pelo GARCH(1,1) INÍCIO

```
GARCH.Spec = garchset('C',0,'P',1,'Q',1,'Display','off');
GARCH.vol_prev = NaN(N,1);
GARCH.mean_prev = NaN(N,1);
for i=N1:N-1
    [GARCH.Coeff, GARCH.Errors, GARCH.LLF, GARCH.Innovations,
    GARCH.Sigmas, GARCH.Summary] = garchfit(GARCH.Spec,dados.r(1:i,1));
    [GARCH.sigmaForecast,GARCH.meanForecast]=
    garchpred(GARCH.Coeff,dados.r(1:i,1));
    GARCH.vol_prev(i+1,1) = GARCH.sigmaForecast;
    GARCH.mean_prev(i+1,1) = GARCH.meanForecast;
end
% Estimação da vol pelo GARCH(1,1) FIM
```

% Construção do VaR Normal utilizando GARCH(1,1) INÍCIO

```
GARCH.VaR.perda_prev = NaN(N,1);
GARCH.VaR.SDFM = 1.645; % alfa=5%
GARCH.VaR.contador = 0;
for i=N1+1:N
    GARCH.VaR.perda_prev(i,1) = (-1)*GARCH.VaR.SDFM*GARCH.vol_prev(i,1);
    if (dados.r(i,1)<GARCH.VaR.perda_prev(i,1))
        GARCH.VaR.contador = GARCH.VaR.contador + 1;
    end
end
GARCH.VaR.porcent = GARCH.VaR.contador/N2;
% Construção do VaR Normal utilizando GARCH(1,1) FIM
```

8. Referência Bibliográfica

Alexander, C. (2005): “The Present and Future of Financial Risk Management,” *Journal of Financial Econometrics*, 3, 3-25.

Alizadeh, S., M. W. Brandt and F. X. Diebold (2002): “Range-Based Estimation of Stochastic Volatility Models,” *The Journal of Finance*, 57(3), 1047-1091.

Andersen, T. G. (2004): “Discussion,” *Journal of Financial Econometrics*, 2, 37-48.

Andersen, T. G., L. Benzoni and J. Lund (2002): “An Empirical Investigation of Continuous-Time Equity Return Models,” *The Journal of Finance*, 57(3), 1239-1284.

Andersen, T. G. and T. Bollerslev (1998): “Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts,” *International Economic Review*, 39(4), 885-905.

Andersen, T. G., T. Bollerslev and D. Dobrev (2007): “No-arbitrage semi-martingale restrictions for continuous-time volatility models subject to leverage effects, jumps and i.i.d. noise: Theory and testable distributional implications,” *Journal of Econometrics*, 138(1), 125-180.

Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold and J. G. Wu (2005): “A Framework for Exploring the Macroeconomic Determinants of Systematic Risk,” *The American Economic Review*, 95(2), 398-404.

Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold and P. Labys (2003): “Modeling and Forecasting Realized Volatility,” *Econometrica*, 71(2), 579-625.

Andersen, T. G., T. Bollerslev and N. Meddahi (2005): "Correcting the Errors: Volatility Forecast Evaluation Using High-Frequency Data and Realized Volatilities," *Econometrica*, 73(1), 279-296.

Andreou, E. and E. Ghysels (2002): "Detecting Multiple Breaks in Financial Market Volatility Dynamics," *Journal of Applied Econometrics*, 17(5), 579-600.

Bandi, F. M. and B. Perron (2006): "Long Memory and the Relation Between Implied and Realized Volatility," *Journal of Financial Econometrics*, 4, 636-670.

Bansal, R. and A. Yaron (2004): "Risks for the Long Run: A Potential Resolution of Asset Pricing Puzzles," *The Journal of Finance*, 59(4), 1481-1509.

Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard (2002a): "Econometric Analysis of Realized Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models," *Journal of the Royal Statistical Society B*, 64(2), 253-280.

Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard (2002b): "Estimating Quadratic Variation Using Realized Variance," *Journal of Applied Econometrics*, 17(5), 457-477.

Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard (2001): "Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics," *Journal of the Royal Statistical Society B*, 63(2), 167-241.

Barndorff-Nielsen, O. E., P. Hansen, A. Lunde and N. Shephard (2008): "Designing Realised Kernels to Measure the Ex-Post Variation of Equity Prices in the Presence of Noise," SSRN Electronic Paper Collection, Working Paper Series.

Beltratti, A. and C. Morana (1999): "Computing value at risk with high frequency data," *Journal of Empirical Finance*, 6(5), 431-455.

Berkowitz, J. and J. O'Brien (2002): "How Accurate Are Value-at-Risk Models at Commercial Banks?," *The Journal of Finance*, 57(3), 1093-1111.

Bollen, B. and B. Inder (2002): "Estimating daily volatility in financial markets utilizing intraday data," *Journal of Empirical Finance*, 9(5), 551-562.

Bollerslev, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

Bollerslev, T. and J. H. Wright (2001): "High-Frequency Data, Frequency Domain Inference, and Volatility Forecasting," *The Review of Economics and Statistics*, 83(4), 596-602.

Bollerslev, T., J. Litvinova and G. Tauchen (2006): "Leverage and Volatility Feedback Effects in High-Frequency Data," *Journal of Financial Econometrics*, 4, 353-384.

Carvalho, M. R.C., M. A. S. Freire, M. Medeiros and L. R. Souza (2006): "Modeling and Forecasting the Volatility of Brazilian Asset Returns: A Realized Variance Approach," *Revista Brasileira de Finanças*, 4, 321-343.

Corsi, F. (2004): "A Simple Long Memory Model of Realized Volatility," Manuscript, University of Southern Switzerland.

Chan, L. K. C., J. Karceski and J. Lakonishok (1999): "On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model," *The Review of Financial Studies*, 12(5), 937-974.

Christoffersen, P. F. and F. X. Diebold (2000): "How Relevant is Volatility Forecasting for Financial Risk Management?," *The Review of Economics and Statistics*, 82(1), 12-22.

Deo, R., C. Hurvich and Y. Lu (2006): "Forecasting realized volatility using a long-memory stochastic volatility model: estimation, prediction and seasonal adjustment," *Journal of Econometrics*, 131(1,2), 29-58.

Diebold, F. X., J. Hahn and A. S. Tay (1999): "Multivariate Density Forecast Evaluation and Calibration in Financial Risk Management: High-Frequency Returns on Foreign Exchange," *The Review of Economics and Statistics*, 81(4), 661-673.

Diebold, F. X., T. A. Gunther and A. S. Tay (1998): "Evaluating Density Forecasts with Applications to Financial Risk Management," *International Economic Review*, 39(4), 863-883.

Eberlein, E., U. Keller and K. Prause (1998): "New Insights into Smile, Mispricing, and Value at Risk: The Hyperbolic Model," *The Journal of Business*, 71(3), 371-405.

Engle, R. F. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50(4), 987-1007.

Engle, R. (2002a): "Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate GARCH Models," *Journal of Business and Economic Statistics*, July, V20N3.

Engle, R. (2002b): "New Frontiers for Arch Models," *Journal of Applied Econometrics*, 17(5), 425-446.

Engle, R. (2004): "Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice," *The American Economic Review*, 94(3), 405-420.

Engle, R. F. (1989): "Stock Volatility and the Crash of '87: Discussion," *The Review of Financial Studies*, 3(1), 103-106.

Engle, R. F. and G. M. Gallo (2006): "A multiple indicators model for volatility using intra-daily data," *Journal of Econometrics*, 131(1,2), 3-27.

Fleming, J., C. Kirby and B. Ostdiek (2001): "The Economic Value of Volatility Timing," *The Journal of Finance*, 56(1), 329-352.

Forsberg, L. and E. Ghysels (2007): "Why Do Absolute Returns Predict Volatility So Well?," *Journal of Financial Econometrics*, 5, 31-67.

Forsberg, L. and T. Bollerslev (2002): "Bridging the Gap between the Distribution of Realized (ECU) Volatility and ARCH Modelling (Of the Euro): The GARCH-NIG Model," *Journal of Applied Econometrics*, 17(5), 535-548.

Franses, P. H. and M. McAleer (2002): "Financial Volatility: An Introduction," *Journal of Applied Econometrics*, 17(5), 419-424.

Giot, P. and S. Laurent (2004): "Modelling daily Value-at-Risk using realized volatility and ARCH type models," *Journal of Empirical Finance*, 11(3), 379-398.

Green, T. C. and S. Figlewski (1999): "Market Risk and Model Risk for a Financial Institution Writing Options," *The Journal of Finance*, 54(4), 1465-1499.

Hansen, P. R. and A. Lunde (2005): "A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-Frequency Data," *Journal of Financial Econometrics*, 3, 525-554.

Jiang, G. J. and R. C. A. Oomen (2007): "Estimating Latent Variables and Jump Diffusion Models Using High-Frequency Data," *Journal of Financial Econometrics*, 5, 1-30.

Jorion, P. (1995): "Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market," *The Journal of Finance*, 50(2), 507-528.

Kuester, K., S. Mittnik, and M. S. Paoletta (2006): "Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies," *Journal of Financial Econometrics*, 4, 53-89.

Lanne, M. (2006): "A Mixture Multiplicative Error Model for Realized Volatility," *Journal of Financial Econometrics*, 4, 594-616.

Maheu, J. M. and T. H. McCurdy (2007): "Components of Market Risk and Return," *Journal of Financial Econometrics*, 5, 560-590.

Maheu, J. M. and T. H. McCurdy (2002): "Nonlinear Features of Realized FX Volatility," *The Review of Economics and Statistics*, 84(4), 668-681.

Martens, M. and D. Dijk (2007): "Measuring volatility with the realized range," *Journal of Econometrics*, 138(1), 181-207.

McAleer, M. and M. Medeiros (2008): "Realized Volatility: A Review," *Econometric Reviews*, 27, 10-45.

Meddahi, N. (2002): "A Theoretical Comparison between Integrated and Realized Volatility," *Journal of Applied Econometrics*, 17(5), 479-508.

Oomen, R. C. A. (2005): "Properties of Bias-Corrected Realized Variance Under Alternative Sampling Schemes," *Journal of Financial Econometrics*, 3, 555-577.

Bauwens, L. and N. Hautsch (2006): "Stochastic Conditional Intensity Processes," *Journal of Financial Econometrics*, 4, 450-493.

Poon, S. H. and C. W. J. Granger (2003): "Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review," *Journal of Economic Literature*, 41(2), 478-539.

Poon, S. H., M. Rockinger and J. Tawn (2004): "Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, Models, and Financial Implications," *The Review of Financial Studies*, 17(2), 581-610.

Scharth, M. and M. Medeiros (2006): "Asymmetric Effects and Long Memory in the Volatility of DJIA Stocks," *Texto para Discussão*, 532, Departamento de Economia, PUC-Rio.

Taylor, S. J. (1986): *Modelling Financial Time Series*, John Wiley, Chichester.

Thomakos, D. D. and T. Wang (2003): "Realized volatility in the futures markets," *Journal of Empirical Finance*, 10(3), 321-353.

Zakoian, J. M. (1994): "Threshold Heteroskedastic Models," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5), 931-55.